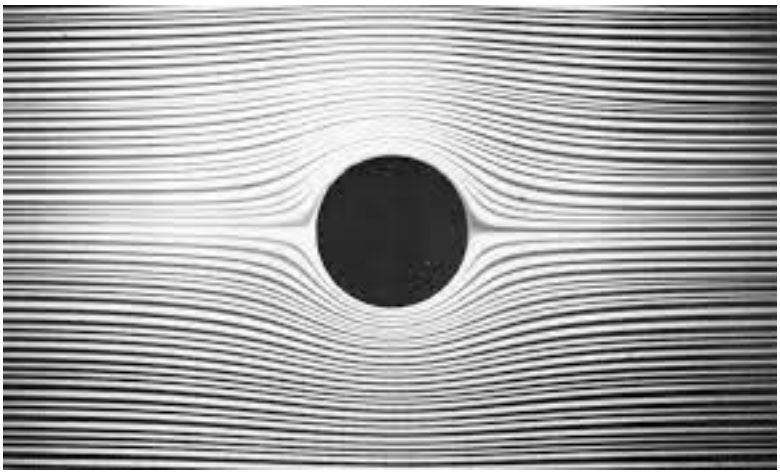
Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik

Von
C. W. Oseen

Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik



Teil I.
Note über die Berechnung der durch eine Kugel hervorgerufenen, stationären Bewegung einer reibenden Flüssigkeit

Mitgeteilt am 8. September 1909 durch A. Lindstedt und L. E. Phragmén.

Das Problem kann auf dem jetzigen Standpunkt der Wissenschaft nur mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen in Angriff genommen werden. Vorbedingung für die Anwendung dieser Methode ist die Integration des Systems:

$$\mu \cdot \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x} + X\,,$$
$$\mu \cdot \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y} + Y\,,$$
$$\mu \cdot \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z} + Z\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,$$

mit vorgeschriebenen Werten von u, v, w auf der Oberfläche der Kugel. Um dieses Problem zu lösen, kann man, wie Herr Korn neuerdings betreffend das innere Problem gezeigt hat[1], u, v, w in Reihen entwickeln, welche nach gewissen von Herrn Korn eingeführten Funktionentripeln fortlaufen. Die so erhaltenen Reihen sind übrigens im Falle $X = Y = Z = 0$ von sehr einfacher und schöner Bauart. Man kann aber auch das Problem mit Hilfe der verallgemeinerten Green'schen Methode angreifen. Dies soll hier geschehen. Wir beschränken uns dabei auf das äußere Problem.

Die von H. A. Lorentz eingeführten Green'schen Funktionen des obigen Systems sind:

$$u_1 = \tfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}\,, \qquad v_1 = u_2 = \tfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\,, \qquad w_1 = u_3 = -\tfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\,,$$

$$v_2 = \tfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}\,, \qquad w_2 = v_3 = -\tfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\,, \qquad w_3 = \tfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}\,,$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\,.$$

Um die Green'schen Funktionen der Kugel zu bestimmen, haben wir also das

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XXV, 1908.

System:

$$\begin{aligned}
\mu \cdot \Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x} \\
\mu \cdot \Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y} \\
\mu \cdot \Delta w &= \frac{\partial p}{\partial z} \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen: auf der Kugel: $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ oder $u = u_2$, $v = v_2$, $w = w_2$ oder $u = u_3$, $v = v_3$, $w = w_3$ zu integrieren.
Die Gleichung der Kugel sei:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \,.$$

Dann muss:

$$\varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > a^2 \,.$$

Unsere Methode ist derjenigen Methode nachgebildet, welche Herr Almansi in der Elastizitätstheorie der Kugel angewandt hat. Wir suchen drei Potentialfunktionen U, V, W, welche außerhalb der Kugel regulär sind, im Unendlichen verschwinden und auf der Kugel die vorgeschriebenen Werte z.B. u_1, v_1, w_1 annehmen. Wir setzen sodann:

$$\begin{aligned}
u &= \left(\varrho^2 - a^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + U \,, \\
v &= \left(\varrho^2 - a^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V \,, \\
w &= \left(\varrho^2 - a^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + W \,,
\end{aligned}$$

Die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ergibt:

$$\left(\varrho^2 - a^2\right) \cdot \Delta\varphi + 2 \cdot \left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

was uns erlaubt φ aus den (kompatiblen) Gleichungen:

$$\Delta\varphi = 0$$
$$2 \cdot \left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

zu bestimmen.
Die übrigens ziemlich einfachen Zwischenrechnungen übergehend geben wir sofort die Resultate an.
Wir setzen:

$$x_0' = \frac{x_0 a^2}{\varrho_0^2}\,, \quad y_0' = \frac{y_0 a^2}{\varrho_0^2}\,, \quad z_0' = \frac{z_0 a^2}{\varrho_0^2}\,,$$
$$r'^2 = (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2$$

Die Funktionen U_x, V_x W_x, P_x, welche außerhalb der Kugel $\varrho^2 = a^2$ überall mit Ausnahme des Punktes x_0, y_0, z_0 regulär sind, sich in der Umgebung dieses Punktes wie $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}$, $-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}$, $-2\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ verhalten, im Unendlichen verschwinden und auf der Kugel $\varrho^2 = a^2$ den Bedingungen $U_x = V_x = W_x = 0$ genügen, sind dann:

$$\begin{aligned}
U_x = {} & \frac{a \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (\varrho^2 - a^2)}{2\varrho_0^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2x_0}{\varrho_0^2} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) \right] + \frac{1}{r} + \frac{(x - x_0)^2}{r^3} - \frac{a}{\varrho_0 r'} \\
& - \frac{a^3}{\varrho_0^3} \cdot \frac{(x - x_0')^2}{r'^3} - \frac{a x_0^2 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^5 r'} + \frac{2a^3 x_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (x - x_0')}{\varrho_0^5 r'^3} \\
& + \frac{2a^3 x_0^2 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^7} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_x = {} & \frac{a \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (\varrho^2 - a^2)}{2\varrho_0^3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2x_0}{\varrho_0^2} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) \right] \\
& + \frac{(x - x_0) \cdot (y - y_0)}{r^3} - \frac{a^3 \cdot (x - x_0') \cdot (y - y_0')}{\varrho_0^3 r'^3} - \frac{a x_0 y_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^5 r'} \\
& + \frac{a^3 x_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (y - y_0')}{\varrho_0^5 r'^3} + \frac{a^3 y_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (x - x_0')}{\varrho_0^5 r'^3} \\
& + \frac{2a^3 x_0 y_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^7} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right)\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_x = {} & \frac{a \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (\varrho^2 - a^2)}{2\varrho_0^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2x_0}{\varrho_0^2} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) \right] \\
& + \frac{(x - x_0) \cdot (z - z_0)}{r^3} - \frac{a^3 \cdot (x - x_0') \cdot (z - z_0')}{\varrho_0^3 r'^3} - \frac{a x_0 z_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^5 r'} \\
& + \frac{a^3 x_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (z - z_0')}{\varrho_0^5 r'^3} + \frac{a^3 z_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2) \cdot (x - x_0')}{\varrho_0^5 r'^3} \\
& + \frac{2a^3 x_0 z_0 \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^7} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_x = {} & -2\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2\mu a^3}{\varrho_0^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) + \frac{a\mu \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2x_0}{\varrho_0^2} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) \right] \\
& + \frac{2a\mu \cdot (\varrho_0^2 - a^2)}{\varrho_0^3} \cdot \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{2x_0}{\varrho_0^2} \cdot \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{1}{r'} \right) \right] .
\end{aligned}
$$

Durch Permutation der Buchstaben erhält man U_y, V_y, W_y, P_y; U_z, V_z, W_z, P_z. Unter den Problemen, welche durch Anwendung der obigen Formeln gelöst werden können, mag die durch die stationäre Rotation einer Kugel um einen Durchmesser hervorgerufene stationäre Bewegung erwähnt werden.

Teil II.
Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. ERSTE MITTEILUNG

Mitgeteilt am 14. September 1910 durch A. Lindstedt und L. E. Phragmén.

1. Beweis der Stokesschen Formel und weiterführende Berücksichtigung quadratischer Glieder derselbigen

Die Stokes'sche Formel für den Widerstand, den eine Kugel erfährt, die sich mit konstanter, unendlich kleiner Geschwindigkeit in einer reibenden, unzusammendrückbaren Flüssigkeit bewegt, wurde von ihrem Autor auf die folgende Weise bewiesen. Die Navier'schen Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit, auf ein Koordinatensystem bezogen, welches seinen Anfangspunkt in dem Mittelpunkte der Kugel hat und sich mit dieser bewegt, lauten:[2]

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\cdot\Delta u\,,\\
\varrho\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\Delta v\,,\\
\varrho\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cdot\Delta w\,,\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\,,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Die zugehörigen Nebenbedingungen sind:

1. für $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\infty$: $u=-u_0$, $v=0$, $w=0$;

[2]Mit dem Laplace-Operator Δ

$$\Delta f=\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

2. für $R = a$: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$

wenn u_0 die Geschwindigkeit der Kugel und a ihr Radius ist und wenn die x-Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel zusammenfällt.
Wir nehmen an, dass die Bewegung der Flüssigkeit, von der Kugel aus beurteilt, stationär ist. Die ersten Glieder in den drei ersten Gleichungen fallen dann weg. Ferner ist offenbar: wenn überhaupt drei Funktionen u, v, w existieren, welche die Differentialgleichungen und Nebenbedingungen befriedigen, und welche überall außerhalb der Kugel endliche, stetige Funktionen von x, y, z sind mit stetigen Ableitungen der zwei ersten Ordnungen, dann müssen diese u, v, w sowie $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ überall gleichzeitig mit u_0 gegen Null abnehmen. Es liegt dann nahe anzunehmen, dass wenn u_0 klein ist, die s. g. quadratischen Glieder $u\frac{\partial u}{\partial x}$, ..., von höherer Ordnung klein sein müssen als die Glieder $\frac{\partial p}{\partial x}$, ..., Δu, ..., und dass man folglich die quadratischen Glieder vernachlässigen kann. Wenn man das tut, bekommen die Differentialgleichungen die verhältnismäßig einfache Form:

$$\begin{aligned}
\mu \cdot \Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x} \\
\mu \cdot \Delta v &= \frac{\partial p}{\partial y} \\
\mu \cdot \Delta w &= \frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dieses System von Differentialgleichungen mit den Nebenbedingungen:

1. für $R = \infty$: $u = -u_0$, $v = 0$, $w = 0$

2. für $R = a$: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$

ist leicht lösbar. Man findet, dass die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{3}{4}\frac{au_0}{R^3} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) \cdot x^2 - u_0 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{R} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{R^3}\right) \\
v &= \frac{3}{4}\frac{au_0}{R^3} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) \cdot xy \\
w &= \frac{3}{4}\frac{au_0}{R^3} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) \cdot xz \\
p &= \frac{3}{2}\frac{\mu a u_0}{R^3} \cdot x
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

die Differentialgleichungen sowie die Nebenbedingungen befriedigen. Aus diesen Formeln leitet man leicht den Stokes'schen Ausdruck für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel ab.

Ein Versuch, die STOKES'sche Formel durch Berücksichtigung der vernachlässigten quadratischen Glieder zu verbessern, wurde im Jahre 1888 von Herrn WHITEHEAD gemacht.[3] Der Versuch scheiterte an dem Umstande, dass es sich unmöglich zeigte, Korrektionsglieder zu den Ausdrücken für u, v, w zu bestimmen, welche die bezüglichen Differentialgleichungen befriedigen, für $R = a$ und gleichzeitig für $R = \infty$ verschwinden. Herr WHITEHEAD ist geneigt diesen Umstand mit der Tatsache in Verbindung zu setzen, dass bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit Wirbel aufzutreten pflegen, hebt aber hervor, dass sein Ergebnis nicht ausreicht, um zu beweisen, dass solche Wirbel bei der Bewegung einer Kugel stets auftreten.
Die STOKES'sche Formel spielt bekanntlich eine grosse Rolle in der neueren Korpusculartheorie. Dies hat zu einer experimentellen Prüfung derselben geführt.[4] Diese hat gezeigt, dass für Körper, welche mit genügender Genauigkeit sphärische Form besitzen, die Formel innerhalb gewisser Grenzen in Bezug auf Größe und Geschwindigkeit exakt ist, ein Umstand, der offenbar gegen die Annahme spricht, dass die Bewegung einer Kugel stets Wirbel hervorrufe.
Die Frage nach der Art der Bewegung, welche die fortschreitende Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit hervorruft, wurde neuerdings eingehend von Herrn F. W. LANCHESTER besprochen.[5] Dieser Autor nimmt an, dass für jeden Körper eine Grenzgeschwindigkeit existiert, unterhalb deren die durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit singularitätenfrei ist, ohne diese Annahme durch eine Analyse der Bewegungsgleichungen zu begründen.
Bevor wir weiter gehen, müssen wir uns klar machen, warum die Arbeit von Herrn WHITEHEAD zu einem negativen Ergebnis führte. Der Grund ist einfach der, dass STOKES bei der Ableitung seiner Formel Glieder vernachlässigte, welche in grosser Entfernung von der Kugel eine ausschlaggebende Bedeutung besitzen. Um dieses einzusehen, hat man nur nötig aus Gleichung 2 das Produkt $u\frac{\partial u}{\partial x}$ zu bilden. Man bekommt:

$$-\frac{3}{4}\frac{au_0^2x}{R^3}\cdot\left(1-\frac{3x^2}{R^2}\right)+\cdots,$$

wo die nicht aufgeschriebenen Glieder in großer Entfernung von der Kugel gegen die ausgeschriebenen klein sind. Gleichzeitig ist:

$$\mu\cdot\Delta u=-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{3}{2}\frac{\mu a u_0}{R^3}\cdot\left(1-\frac{3x^2}{R^2}\right).$$

Wie klein nun u_0 auch ist, so gibt es stets Gebiete in der Flüssigkeit, innerhalb deren das Glied $\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}$ im Vergleich mit $\frac{\partial p}{\partial x}$ oder $\mu\cdot\Delta u$ groß ist. Es ist demnach offenbar, dass eine befriedigende Theorie nicht ohne weiteres die quadratischen Glieder vernachlässigen kann.

[3] J. B. WHITEHEAD, Quart. Journ. of Math. **23** S. 78, 1888.
[4] Vgl. ZELENY und MC KEEHAN, Physik. Zeitschrift (1910), S. 78.
[5] F. W. LANCHESTER, Aerodynamics, London, 1907.

2. Auffindung des Zusammenhanges einer stationären, sich teils translatorisch und singularitätenfrei fortbewegenden Flüssigkeit mit einer sich in selbiger, äußerst langsam und konstant bewegender Kugel

Die Frage, welche in erster Linie eine Antwort verlangt, ist die: ist, wenn eine Kugel sich mit konstanter, genügend kleiner Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt, eine singularitätenfreie, stationäre Bewegung der Flüssigkeit mit den NAVIER'schen Differentialgleichungen (oder den entsprechenden Integralgleichungen) vereinbar? Ähnliche Fragen treten in großer Zahl in der Hydrodynamik auf. Der Körper kann z.B. andere Formen als die Kugelform haben. Was in der Frage wesentlich ist, ist folgendes: ist eine stationäre, singularitätenfreie Bewegung einer Flüssigkeit möglich, wenn ein Teil derselben durch irgend welche äußere Mittel translatorisch fortbewegt wird? Die ungleich einfachste von den vielen hieher gehörigen Fragen ist die folgende. Wir nehmen an, dass auf eine Flüssigkeit ein System von Kräften wirkt, deren Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung fortbewegen. Die Frage ist, ob eine singularitätenfreie Bewegung der Flüssigkeit, welche von einem Punkte betrachtet, der sich mit den Kräften fortbewegt, stationär ist, unter diesen Umständen möglich ist. Es ist nicht meine Absicht, diese Frage hier zu beantworten. Ich hoffe bei einer anderen Gelegenheit auf sie zurückkommen zu können. Hier möchte ich die mathematischen Hilfsmittel entwickeln, welche zu einer Beantwortung der Frage notwendig sind. Es wird sich herausstellen, dass man dabei gleichzeitig eine befriedigendere Begründung der STOKES'schen Formel gewinnt. Wir beziehen die NAVIER'schen Differentialgleichungen auf ein Koordinatensystem, welches sich in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit wie die Angriffspunkte der wirkenden Kräfte fortbewegt. Wir legen die x-Achse in diese Richtung und nennen die Geschwindigkeit u_0. Wir haben dann, weil die Geschwindigkeit in diesem Koordinatensysteme von der Zeit unabhängig sein soll:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u\,, \\
\varrho \cdot \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v\,, \\
\varrho \cdot \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w\,, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\,,
\end{aligned}$$

wo X, Y, Z die Komponenten der wirkenden Kräfte sind. Wir setzen: $u = -u_0 + u'$, $v = v'$, $w = w'$, $p = p'$ und bekommen dann:

$$\left.\begin{aligned}
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) &= X - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} \right) &= Y - \frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + v' \frac{\partial w'}{\partial y} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) &= Z - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w' \,, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \,,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit den Nebenbedingungen:

1. $u' = v' = w' = 0$ für $R = \infty$.

Wir vernachlässigen zunächst die Glieder $\varrho u' \frac{\partial u'}{\partial x}$, etc. und betrachten also das System:

$$\left.\begin{aligned}
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} &= X - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u' \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} &= Y - \frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v' \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} &= Z - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w' \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \,,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mit den Nebenbedingungen:

1. für $R = \infty : u' = v' = w' = 0$.

In den folgenden Rechnungen machen wir die Annahme, dass X, Y, Z stetige Funktionen von x, y, z sind.
Wir betrachten das Hilfssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho u_0 \cdot \frac{\partial u''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u'' \,, \\
\varrho u_0 \cdot \frac{\partial v''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v'' \,, \\
\varrho u_0 \cdot \frac{\partial w''}{\partial x} &= -\frac{\partial p''}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w'' \,, \\
\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} &= 0 \,.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Gleichung 4 und Gleichung 5 ergeben:

$$\begin{aligned}
&\mu \cdot (u''\Delta u' + v''\Delta v' + w''\Delta w' - u'\Delta u'' - v'\Delta v'' - w'\Delta w'') \\
&- \frac{\partial}{\partial x}(u''p' - u'p'') - \frac{\partial}{\partial y}(v''p' - v'p'') - \frac{\partial}{\partial z}(w''p' - w'p'') \\
&+ \varrho u_0 \frac{\partial}{\partial x}(u'u'' + v'v'' + w'w'') + u''X + v''Y + w''Z = 0
\end{aligned}$$

und folglich:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu \cdot \int_S \left[u''\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} + v''\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n} + w''\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}n} - u'\frac{\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}n} - v'\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}n} - w'\frac{\mathrm{d}w''}{\mathrm{d}n}\right] \mathrm{d}S \\
&- \int_S \{[u''\cos(nx) + v''\cos(ny) + w''\cos(nz)]\, p' \\
&- [u'\cos(nx) + v'\cos(ny) + w'\cos(nz)]\, p''\}\, \mathrm{d}s \\
&+ \varrho u_0 \cdot \int_S (u'u'' + v'v'' + w'w'') \cdot \cos(nx)\, \mathrm{d}s \\
&+ \int_\Omega (u''X + v''Y + w''Z)\, \mathrm{d}\omega = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo S ein System von Flächen ist, die ein Gebiet Ω des Raumes abgrenzen, n die äußere Normale in einem Punkte von S, $\mathrm{d}s$ ein Flächenelement und $\mathrm{d}\omega$ ein Volumenelement ist.
Es sei jetzt Φ eine im ganzen x, y, z-Raume existierende Funktion von x, y, z; x_0 y_0, z_0, welche mit ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen nach x, y, z überall endlich und stetig ist mit Ausnahme von dem Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. In der Umgebung dieses Punktes sei:

$$\Phi = r + \Phi_1\,,$$

wo $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ und wo für genügend kleine Werte von r:

$$\begin{aligned}
|\Phi_1|\,, \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right|, \cdots, \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x\, \partial y}\right|, \cdots, \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}\right| &< K\,, \\
\left|\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3}\right|, \left|\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2\, \partial y}\right|, \cdots \left|\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}\right| &< \frac{K_1}{R}\,,
\end{aligned}$$

wo K und K_1 positive Konstanten sind. Endlich nehmen wir an, dass Φ die Gleichung:

$$\Delta\left(\mu \cdot \Delta\Phi - \varrho u_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0 \tag{7}$$

erfüllt.
Wir verwenden Gleichung 6, indem wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
u'' = u_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\
v'' = u_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} \\
w'' = u_{13} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} \\
p'' = p_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta \Phi\right)
\end{aligned}
$$

setzen. In der Umgebung von dem Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ haben wir dann:

$$
\begin{aligned}
u'' &= \frac{1}{r} + \frac{(x - x_0)^2}{r^3} + u_1'' \,, \\
v'' &= \frac{(x - x_0) \cdot (y - y_0)}{r^3} + v_1'' \,, \\
w'' &= \frac{(x - x_0) \cdot (z - z_0)}{r^3} + w_1'' \,, \\
p'' &= 2\mu \cdot \frac{(x - x_0)}{r^3} + p_1'' \,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist für genügend kleine Werte von r:

$$
\begin{aligned}
|u_1''|\,, |v_1''|\,, |w_1''| &< K_1' \cdot \left|\frac{\partial u_1''}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_1''}{\partial y}\right|, \cdots, \left|\frac{\partial w_1''}{\partial z}\right| \\
|p_1''| &< \frac{K_1'}{r}
\end{aligned}
$$

wo K' und K_1' wieder positive Konstanten sind.
Das System S mag jetzt aus einer geschlossenen Fläche S', welche den Punkt x_0, y_0, z_0 umschließt, und aus einer Kugel, welche ihren Mittelpunkt in diesem Punkte hat und deren Radius r' genügend klein ist, damit die Kugel innerhalb S' liegt, bestehen. Auf dieser Kugel haben wir dann

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}n} &= \frac{1}{r^2} + \frac{(x - x_0)^2}{r^4} + \cdots \,, \\
\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}n} &= \frac{(x - x_0) \cdot (y - y_0)}{r^4} + \cdots \,, \\
\frac{\mathrm{d}w''}{\mathrm{d}n} &= \frac{(x - x_0) \cdot (z - z_0)}{r^4} + \cdots \,.
\end{aligned}
$$

Wir können jetzt in der Gleichung 6 den Grenzübergang $r' = 0$ ausführen. Wir haben, wenn u', v', w' stetige Funktionen von x, y, z mit stetigen Ableitungen nach diesen Veränderlichen und wenn p ebenfalls eine stetige Funktion ist:

$$
\begin{aligned}
u'(x,y,z) &= u'_0 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)_0 \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)_0 \cdot (z - z_0) + \varepsilon r\,, \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} &= -\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 \cdot \frac{x - x_0}{r} - \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)_0 \cdot \frac{y - y_0}{r} - \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)_0 \cdot \frac{z - z_0}{r} + \varepsilon\,, \\
&\vdots \\
p'(x,y,z) &= p'_0 + \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

wenn: $u'_0 = u'(x_0, y_0, z_0)$ etc. und:

$$\lim_{r=0} \varepsilon = 0\,.$$

Wir erhalten folglich, wenn die Integrationen stets über die oben erwähnte Kugel ausgeführt werden

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r'=0} \int \left(u'' \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} + \cdots \right) \mathrm{d}s = \lim_{r'=0} \int \left(u' \frac{\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}n} + \cdots \right) \mathrm{d}s \\
&= u'_0 \int \left(\frac{1}{r^2} + \frac{(x - x_0)^2}{r^4} \right) \mathrm{d}s = \frac{16}{3} \pi u'_0\,, \\
&\lim_{r'=0} \int (u'' \cos(nx) + \cdots)\, p' \,\mathrm{d}s = 0\,, \\
&\lim_{r'=0} \int (u' \cos(nx) + \cdots)\, p'' \,\mathrm{d}s = -\frac{8}{3} \pi \mu u'_0\,, \\
&\lim_{r'=0} \int (u'u'' + v'v'' + w'w'') \cdot \cos(nx) \,\mathrm{d}s = 0\,.
\end{aligned}
$$

Wir haben ferner, wenn Ω' derjenige Teil des Raumes ist, der innerhalb S' liegt:

$$\lim_{r'=0} \int_{\Omega} (u''X + v''Y + w''Z) \,\mathrm{d}\omega = \int_{\Omega'} (u_{11}X + u_{12}Y + u_{13}Z) \,\mathrm{d}\omega\,.$$

Folglich:

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu u'(x_0, y_0, z_0) = &\int_{\Omega'} (u_{11}X + u_{12}Y + u_{13}Z)\,\mathrm{d}\omega \\
&+ \varrho u_0 \cdot \int_{S'} (u'u_{11} + v'u_{12} + w'u_{13})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_{S'} (u'_n p_1 - u_{1,n}p')\,\mathrm{d}s \\
&+ \mu \cdot \int_{S'} \left[u' \frac{\mathrm{d}u_{11}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{11}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots \right] \mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist:

$$
\begin{aligned}
u'_n &= u'\cos(nx) + v'\cos(ny) + w'\cos(nz)\,, \\
u_{1,n} &= u_{11}\cos(nx) + u_{12}\cos(ny) + u_{13}\cos(nz)\,.
\end{aligned}
$$

Man erhält auf dieselbe Weise:

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu v'(x_0, y_0, z_0) = &\int_{\Omega'} (u_{21}X + u_{22}Y + u_{23}Z)\,\mathrm{d}\omega \\
&+ \varrho u_0 \cdot \int_{S'} (u'u_{21} + v'u_{22} + w'u_{23})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_{S'} (u'_n p_2 - u_{2,n}p')\,\mathrm{d}s \\
&+ \mu \cdot \int_{S'} \left[u' \frac{\mathrm{d}u_{21}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{21}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots \right] \mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu w'(x_0, y_0, z_0) = &\int_{\Omega'} (u_{31}X + u_{32}Y + u_{33}Z)\,\mathrm{d}\omega \\
&+ \varrho u_0 \cdot \int_{S'} (u'u_{31} + v'u_{32} + w'u_{33})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_{S'} (u'_n p_3 - u_{3,n}p')\,\mathrm{d}s \\
&+ \mu \cdot \int_{S'} \left[u' \frac{\mathrm{d}u_{31}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{31}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots \right] \mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
u_{21} = u_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}\,, \\
u_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\,, \\
u_{23} = u_{32} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}\,, \\
u_{31} = u_{13} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} \\
u_{33} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,, \\
p_2 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta \Phi\right)\,, \\
p_3 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho u_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta \Phi\right)
\end{aligned}
$$

ist. Es erübrigt die entsprechende Formel für p' zu bilden. Wir setzen zu dem Zweck in Gleichung 6:

$$
\begin{aligned}
u'' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\,, \\
v'' &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\,, \\
w'' &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\,, \\
p'' &= -\varrho u_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten auf der Kugel für $r = r'$:

$$
\begin{aligned}
u'' &= -\frac{(x - x_0)}{r^3}\,, \\
&\text{etc.} \\
p'' &= \frac{\varrho u_0 \cdot (x - x_0)}{r^3}\,, \\
\frac{\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}n} &= -2 \cdot \frac{(x - x_0)}{r^4}\,, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und folglich:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r'=0}\int_{r=r'}\left(u''\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n}+v''\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n}+w''\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s\\
&=-\int\frac{1}{r^4}\cdot\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0\cdot(x-x_0)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_0\cdot(y-y_0)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_0\cdot(z-z_0)^2\right]\mathrm{d}s\\
&=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{r^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_0\right]\mathrm{d}s=0\,,\\
&\lim_{r'=0}\int_{r=r'}\left(u'\frac{\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}n}+\cdots\right)\mathrm{d}s=0\,,\\
&\lim_{r'=0}\int_{r=r'}(u''\cos(nx)+\cdots)\,p'\,\mathrm{d}s=4\pi p_0'\,,\\
&\lim_{r'=0}\int_{r=r'}(u'\cos(nx)+\cdots)\,p''\,\mathrm{d}s=-\varrho u_0u_0'\int\frac{(x-x_0)^2}{r^4}\,\mathrm{d}s=-\frac{4}{3}\pi\varrho u_0u_0'\,,\\
&\lim_{r'=0}\int_{r=r'}(u'u''+\cdots)\cos(nx)\,\mathrm{d}s=\frac{4}{3}\pi u_0'\,,\\
&\lim_{r'=0}\int_{\Omega}(u''X+v''Y+w''Z)\,\mathrm{d}\omega\\
&=\int_{\Omega'}\left[X\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\omega\,.
\end{aligned}
$$

Also ist:

$$
\begin{aligned}
4\pi p'(x_0,y_0,z_0)=&\int_{\Omega'}\left[X\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+Y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\omega\\
&+\varrho u_0\cdot\int_{S'}\left[u'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+v'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+w'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cos(nx)\,\mathrm{d}s\\
&-\int_{S'}\left[p'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)+\varrho u_0u_n'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s\\
&+\mu\cdot\int_{S'}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}n}\right.\\
&\left.-u'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-v'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)-w'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

Wir müssen jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Herstellung der Funktion Φ richten. Wir betrachten zu diesem Zweck das Integral:

$$
-\frac{1}{2\pi}\iiint e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\bar{r}}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,
$$

wobei

$$\bar{r}^2 = (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 \ ,$$
$$R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \ ,$$

ist, während:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \ .$$

Die Integration wird über den ganzen Raum erstreckt. Wie unmittelbar ersichtlich, definiert das Integral eine bestimmte, stetige und stetig differenzierbare Funktion von x, y, z. Es sei S_0 eine geschlossene Fläche mit überall stetigen Tangentenebenen; Ω_0 ist dasjenige Raumgebiet, das innerhalb S_0 liegt. Wir setzen dann:

$$-\frac{1}{2\pi}\iiint e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\bar{r}}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \Phi' + \Phi'' + \Phi''' \,,$$

wobei:

$$\Phi' = -\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}R} \,,$$
$$\Phi'' = \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}^2}$$

und:

$$\Phi''' = -\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Omega'} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\bar{r}}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \,,$$

und sich die Integration über den Raum außerhalb S_0 erstreckt. Φ'' ist von x, y, z unabhängig. Wenn wie wir jetzt voraussetzen wollen, x, y, z ein Punkt innerhalb S_0 ist, so ist ferner Φ''' beliebig oft in Bezug auf x, y, z derivierbar, und die Ableitungen sind endlich und stetig, selbst dann, wenn $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Um das Verhalten unseres Integrals in der Umgebung von dem Punkte x_0, y_0, z_0 zu studieren, haben wir also nur die Funktion Φ' zu untersuchen. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi'}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\iiint_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\iiint_{\Omega_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{\cos(nx)}{\bar{r}R}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi}\int_{S_0}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}}{\bar{r}}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar{r}-\xi+x_0)}{2\mu}}\cdot\frac{\cos(nx)}{\bar{r}R}\,\mathrm{d}s - \frac{\partial\Phi'}{\partial x_0} \,.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen im Folgenden mit ψ eine beliebige Funktion von x, y, z; x_0, y_0, z_0 welche, wenn die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 innerhalb S_0 liegen, stetig und in Bezug auf den sechs Veränderlichen beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir haben dann:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x_0} + \psi$$

und ebenso:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y_0} + \psi\,,$$
$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial z_0} + \psi\,.$$

Wir haben ebenso:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}}}{\bar{r}}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + \psi\,,$$

u.s.w.
Ich behaupte jetzt, dass, wenn die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 innerhalb Ω_0 liegen und wenn $r > 0$, Φ' beliebig oft in Bezug auf x, y, z; x_0, y_0, z_0 stetig differenzierbar ist. Um dieses zu beweisen, zerlegen wir Ω_0 in zwei Teile $\Omega_0^{(1)}$ und $\Omega_0^{(2)}$, von denen der erste den Punkt x, y, z, und der andere den Punkt x_0, y_0, z_0 enthält. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}\Phi' = \Omega'_{(1)} + \Omega'_{(2)} = &-\frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega_0^{(1)}} e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}R} \\ &- \frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega_0^{(2)}} e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}R}\,.\end{aligned}$$

Offenbar ist $\Omega'_{(1)}$ in Bezug auf x_0, y_0, z_0 beliebig oft stetig differenzierbar und $\Omega'_{(2)}$ ebenso in Bezug auf x, y, z. Ferner ist:

$$\frac{\partial \Omega'_{(1)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega'_{(1)}}{\partial x_0} + \psi_{(1)} \quad \text{u.s.w.},$$

wenn $\psi_{(1)}$ in Bezug auf das Gebiet $\Omega_0^{(1)}$ dieselben Bedingungen erfüllt wie ψ in Bezug auf Ω_0. Wir haben folglich:

$$\frac{\partial^2 \Omega'_{(1)}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Omega'_{(1)}}{\partial x\,\partial x_0} + \psi_{(1)} = \frac{\partial^2 \Omega'_{(1)}}{\partial x_0^2} + \psi_{(1)}$$

u.s.w. Wir sehen mithin, dass $\Omega'_{(1)}$ auch in Bezug auf x, y, z beliebig oft differenzierbar ist und natürlich ebenso $\Omega'_{(2)}$ in Bezug auf x_0, y_0, z_0. Damit ist die Behauptung

bewiesen.
Um jetzt das Verhalten der Funktion Φ' in der Umgebung von den singulären Werten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ zu untersuchen, setzen wir:

$$\begin{aligned}\Phi' = &-\frac{1}{2\pi}\cdot\iiint_{\Omega_0}\left(e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar r-\xi+x_0)}{2\mu}} - 1 + \frac{\varrho u_0}{2\mu}\cdot(\bar r-\xi+x_0)\right.\\ &\left.-\frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2}\cdot(\bar r-\xi+x_0)^2\right)\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar r R}\\ &-\frac{1}{2\pi}\cdot\iiint_{\Omega_0}\left[1-\frac{\varrho u_0}{2\mu}\cdot(\bar r-\xi+x_0)+\frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2}\cdot(\bar r-\xi+x_0)^2\right]\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar r R}\,.\end{aligned}$$

Da die Funktionen:

$$\begin{aligned}&\frac{e^{-x}-1}{x}\,,\\ &\frac{e^{-x}-1+x}{x^2}\,,\\ &\frac{e^{-x}-1+x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}\end{aligned}$$

für positive Werte von x endliche Maximalwerte besitzen, so folgt leicht, dass man eine solche positive Größe K finden kann, dass die Funktion:

$$e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(\bar r-\xi+x_0)}{2\mu}} - 1 + \frac{\varrho u_0}{2\mu}\cdot(\bar r-\xi+x_0) - \frac{\varrho^2 u_0^2}{8\mu^2}\cdot(\bar r-\xi+x_0)^2 = \mathbf{E}$$

folgenden Ungleichungen genügt:

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}| &< K\cdot\bar r^3\,,\\ \left|\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial z}\right| &< K\cdot\bar r^2\,,\\ \left|\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}\right|,\left|\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x\,\partial y}\right|,\cdots,\left|\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}\right| &< K\cdot\bar r\,,\\ \left|\frac{\partial^3\mathbf{E}}{\partial x^3}\right|,\left|\frac{\partial^3\mathbf{E}}{\partial x^2\,\partial y}\right|,\cdots,\left|\frac{\partial^3\mathbf{E}}{\partial z^3}\right| &< K\,.\end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt sofort, dass das erste Integral in Φ' und seine Ableitungen der drei ersten Ordnungen nach x, y, z endlich und stetig bleiben, wenn x, y, z sich dem Punkte x_0, y_0, z_0 nähert. Durch partielle Integration sieht man, dass dasselbe von den Ableitungen nach x, y, z gilt.

Um das zweite Integral in Φ' zu untersuchen, betrachten wir die Gleichungen

$$\Delta_{\xi,\eta,\zeta} \cdot \bar{r} = \frac{2}{\bar{r}}\,,$$
$$\Delta_{\xi,\eta,\zeta}\left(\frac{1}{R}\right) = 0\,,$$

welche beide innerhalb Ω_0 gelten. Aus diesen Gleichungen folgt durch die gewöhnliche GREENsche Beweismethode:

$$r = -\frac{1}{2\pi} \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}R} + \int_{S_0} \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}n_{\xi,\eta,\zeta}} - \bar{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}s\,,$$

wobei:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_{\xi,\eta,\zeta}} = \cos(nx)\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial\eta} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\,.$$

ist. Folglich ergibt sich:

$$\iiint_{\Omega_0} \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta}{\bar{r}R} = -2\pi r + \psi\,.$$

Wir erhalten in derselben Weise:

$$\iiint_{\Omega_0} \frac{(x_0 - \xi)}{\bar{r}R}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = -\pi r \cdot (x_0 - x) + \psi\,,$$

u.s.w. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist, dass das zweite Integral in Φ' folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$r + \frac{\varrho u_0 r}{4\mu} \cdot (x - x_0) + \frac{\varrho^2 u_0^2 r^3}{72\mu^2} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot (x - x_0)^2}{r^2}\right) + \chi\,,$$

wobei χ eine Funktion von x, y, z; x_0, y_0, z_0 ist, welche mit ihren Ableitungen der drei ersten Ordnungen in der Umgebung von den singulären Werten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ endlich und stetig bleibt.
Zusammenfassend kann man sagen, dass unser Integral sich in der Umgebung der singulären Werte in der oben verlangten Weise verhält.
Es erübrigt sich zu zeigen, dass unser Integral der Gleichung:

$$\Delta\left(\mu \cdot \Delta\Phi - \varrho u_0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0$$

genügt. Man hat aber:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi' = \frac{2 \cdot e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r - x + x_0)}{2\mu}}}{r}\,,$$

folglich, wie zu beweisen war:

$$\left(\mu \cdot \Delta - \varrho u_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta\Phi = 0\,.$$

Die Funktion Φ lässt eine einfache und für viele (aber nicht alle) Zwecke sehr bequeme Darstellung zu. Die Punkte x, y, z; x_0, y_0, z_0 seien im Gebiete Ω_0 gelegen. Wir haben:

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' + \Phi'''$$

und also:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_0} = \frac{\partial\Phi'}{\partial x_0} + \frac{\partial\Phi''}{\partial x_0} + \frac{\partial\Phi'''}{\partial x_0}\,,$$

u.s.w. Wir haben also:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_0} = \frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'}{\partial x_0} + \frac{\partial\Phi''}{\partial x_0} + \frac{\partial\Phi'''}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'''}{\partial x_0}\,.$$

Das Gebiet Ω_0 mag jetzt in allen Richtungen ins unendliche wachsen. Wir haben daher:

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{S_0} e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\bar{r}R}\,\mathrm{d}s\,,$$

und folglich:

$$\lim \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'}{\partial x_0}\right) = 0\,.$$

Wir haben ferner:

$$\frac{\partial\Phi''}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \iiint e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi')}{2\mu}} \cdot \frac{1}{\tilde{r}^2}\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta'\,\mathrm{d}\zeta'\,,$$

wobei:

$$\tilde{r}^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

ist und die Integration über dasjenige Raumgebiet ausgeführt wird, welches man aus Ω_0 durch eine Translation $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$ erhält. Also ist:

$$\frac{\partial\Phi''}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \iiint e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (\bar{r} - \xi + x_0)}{2\mu}} \cdot \frac{\cos(nx)}{\bar{r}^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Folglich ist:

$$\lim \frac{\partial\Phi''}{\partial x_0} = 0\,.$$

Wir haben endlich, wie man ohne Schwierigkeit sieht:

$$\lim \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x} + \frac{\partial \Phi'''}{\partial x_0} \right) = 0 \,.$$

Folglich ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = 0 \,.$$

Man beweist auf dieselbe Weise:

$$\Delta_{x,y,z} \Phi - \Delta_{x_0,y_0,z_0} \Phi = 0 \,.$$

Nun ist aber:

$$\Delta_{x,y,z} \Phi = 2 \cdot \frac{e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}}}{r} \,,$$

und andrerseits:

$$\mu \cdot \Delta_{x_0,y_0,z_0} \Phi + \varrho u_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{2\mu}{r} \,,$$

und daher folglich:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2\mu}{\varrho u_0 r} \cdot \left(e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}} - 1 \right)$$

und also:

$$\Phi(x,y,z) - \Phi(x',y,z) = \frac{2\mu}{\varrho u_0} \cdot \int_{x'}^{x} \left(e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}} - 1 \right) \frac{\mathrm{d}x}{r} \,.$$

Aus diesen Gleichungen folgt u. a.:

$$u_{11} = \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2 \cdot e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}}}{r} - \frac{2\mu}{\varrho u_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}} - 1}{r} \right) \,,$$

$$u_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} = -\frac{2\mu}{\varrho u_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}} - 1}{r} \right)$$

$$u_{13} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial z} = -\frac{2\mu}{\varrho u_0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-\frac{\varrho u_0 \cdot (r-x+x_0)}{2\mu}} - 1}{r} \right) \,.$$

3. Die translatorische Bewegung einer Kugel und die dadurch mitverursachte Bewegung einer reibenden Flüssigkeit sowie eine Erklärung desselben Phänomens

Wir kehren zu der Frage nach der durch die translatorische Bewegung einer Kugel hervorgerufenen Bewegung einer reibenden Flüssigkeit zurück. Wir wollen dieses Problem unter Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung in u_0 lösen. Wir betrachten zu dem Zweck die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned}
u' &= \frac{3}{2}\frac{au_0}{R}\cdot e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(R+x)}{2\mu}} + \frac{3}{2}\frac{\mu a}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(R+x)}{2\mu}}-1}{R}\right.\\
&\quad\left.-\frac{a^3u_0}{4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right],\\
v' &= \frac{3}{2}\frac{\mu a}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(R+x)}{2\mu}}-1}{R}-\frac{a^3u_0}{4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)\right],\\
w' &= \frac{3}{2}\frac{\mu a}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^{-\frac{\varrho u_0\cdot(R+x)}{2\mu}}-1}{R}-\frac{a^3u_0}{4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)\right],\\
p' &= -\frac{3}{2}\mu u_0\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{\varrho a^3u_0^2}{4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Diese Funktionen genügen dem System gemäß Gleichung 4 mit $X = Y = Z = 0$ und den Nebenbedingungen:

1. für $R = \infty$: $u' = v' = w' = 0$,
2. für $R = a$: $u' = u_0$, $v' = 0$, $w' = 0$,

wenn man nämlich im letzten Falle die Größen von zweiter Ordnung in u_0 vernachlässigt.
Die durch die Gleichung 8 definierte Bewegung der Flüssigkeit ergibt für den Widerstand, welchen die Flüssigkeit gegen die Bewegung der Flüssigkeit ausübt, denselben Wert wie die von Stokes betrachtete, wenn man bei der Berechnung nur die Glieder erster Ordnung in u_0 berücksichtigt. Aber die hier betrachtete Bewegung weicht in ihrem ganzen Charakter von der Stokes'schen ab. Man sieht das am Besten, wenn man bemerkt, dass für grosse Werte von R die Geschwindigkeit vor der Kugel wie $\frac{K}{R^2}$ abnimmt, hinter der Kugel dagegen wie $\frac{K'}{R}$. In der von Stokes untersuchten Bewegung herrscht vor und hinter der Kugel vollständige Symmetrie (vom Vorzeichen der Geschwindigkeit abgesehen). Wenn u_0 gegen Null abnimmt, nähert sich unsere Verteilung der Geschwindigkeiten überall der von

Stokes betrachteten, aber die Konvergenz ist keineswegs gleichmäßig. Wie klein auch u_0 ist, so gibt es stets Gebiete, in denen die hier betrachtete Bewegung ganz anders als die Stokes'sche verläuft. Ich glaube, dass es jetzt deutlich ist, warum der Versuch von Herrn Whitehead scheitern musste.

4. Zusammenfassung

1. Bei der von Stokes gegebenen Ableitung der s. g. Stokes'schen Formel werden Glieder vernachlässigt, welche in grosser Entfernung von der Kugel ausschlaggebend sind. Durch diesen Umstand wird es bedingt, dass der von Herrn Whitehead gemachte Versuch die von Stokes gegebenen Formeln für die durch die Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder zu verbessern, scheitern musste.

2. Um dem genannten Übelstand abzuhelfen, muss man auch in erster Annäherung in den Navier'schen Differentialgleichungen gewisse mit dem Faktor u_0 ($u_0 =$ der Geschwindigkeit der Kugel) behafteten Glieder beibehalten. Zu dem so erhaltenen linearen Systeme wurden die verallgemeinerten Greenschen Formeln aufgestellt.

3. Mittelst den so gewonnenen Hilfsmitteln wurde durch die genügend langsame Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit untersucht. Diese Bewegung weicht in hinreichender Entfernung von der Kugel selbst bei den kleinsten Werten von u_0 beträchtlich von der Stokes'schen Bewegung ab. Die Stokes'sche Formel für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel erleidet dadurch keinen Eintrag in ihrer Gültigkeit.

Teil III.
Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. ZWEITE MITTEILUNG.

Mitgeteilt am 11. Januar 1911 durch L. E. Phragmén und I Bendixson.

5. Die Stokes'sche Formel als Grenzfall eines stationären, singularitätenfreien Bewegungszustandes einer sich unter kräfteeinfluss bewegenden, reibenden Flüssigkeit und Beweis des allgemeinen Falles am Beispiel selbiger

In Teil II, im Folgenden kurz als erste Mitteilung zitiert, habe ich gezeigt, dass die von Stokes gegebene Ableitung der sog. Stokes'schen Formel nicht einwandfrei ist, und dass es auf diesen Umstand zurückzuführen ist, dass der von Herrn Whitehead gemachte Versuch, die von Stokes gegebene Formel für die durch die Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer reibenden Flüssigkeit durch Berücksichtigung der sog. quadratischen Glieder zu verbessern, scheiterte. Ich habe ferner gezeigt, wie man, unter der Voraussetzung, dass das Bewegungsproblem eine singularitätenfreie Lösung besitzt, in befriedigenderer Weise zu der Stokes'schen Formel gelangen kann. Da die Stokes'sche Formel innerhalb gewisser Grenzen von der Erfahrung bestätigt wird, so scheint es von vornherein wahrscheinlich, dass jene Voraussetzung erfüllt ist. Da aber eine andere Deutung der experimentellen Tatsachen nicht ausgeschlossen ist – die beobachtbare Bewegung ist gewiss nicht in strengem Sinne stationär, eine quasistationäre, annähernd dem Stokes'schen Gesetze gehorchende Bewegung könnte als Einleitung einer nachfolgenden turbulenten Bewegungsphase aufgefasst werden – und da das allgemeine Problem, von dem das Stokes'sche nur ein sehr spezieller Fall ist, eine für die gesamte Hydrodynamik grundlegende Bedeutung besitzt, so habe ich es für unerlässlich erachtet, nachzuprüfen, ob nach der Theorie wirklich ein stationärer, singularitätenfreier Bewegungszustand möglich ist. Wie ich in meiner ersten Mitteilung hervorgehoben habe, ist es zu diesem Zweck nicht notwendig, das komplizierte Problem von der Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit zu lösen. Die Schwierigkeiten, auf wel-

che es hier ankommt, treten in ganz derselben Art in dem einfacheren Probleme auf, die durch ein translatorisch bewegtes, von der Zeit unabhängiges System von Kräften hervorgerufene, stationäre Bewegung einer reibenden Flüssigkeit zu berechnen. Wenn dieses Problem eine singularitätenfreie Lösung besitzt, so lässt sich mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, dass dasselbe von dem STOKES'schen Probleme gilt. In der folgenden Mitteilung soll nun gezeigt werden, dass das so vereinfachte Problem unter gewissen, unten näher angegebenen Bedingungen eine singularitätenfreie Lösung zulässt.

6. Mathematische Formulierung des Problems

Wir gehen zunächst von den NAVIER'schen Differentialgleichungen aus. Indem wir diese auf ein Koordinatensystem beziehen, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 der x-Achse entlang bewegt, bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u \,, \\
\varrho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v \,, \\
\varrho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w \,, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \,,
\end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen:

1. für $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \infty$: $u = -u_0$, $v = 0$, $w = 0$.

Dabei sind X, Y, Z die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft. Wir nehmen an, dass sie abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z sind.
Da wir eine von t unabhängige Lösung unseres Problems suchen, so haben wir $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ zu setzen. Wir setzen sodann:

$$\begin{aligned}
u &= -u_0 + u' \,, \\
v &= v' \,, \\
w &= w'
\end{aligned}$$

und bekommen:

$$
\begin{aligned}
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \cdot \frac{\partial u'}{\partial z} \right) &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \cdot \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \cdot \frac{\partial v'}{\partial z} \right) &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u' \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + v' \cdot \frac{\partial w'}{\partial y} + w' \cdot \frac{\partial w'}{\partial z} \right) &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w' \,, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \,,
\end{aligned}
$$

Dieses System lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(w'\overline{v'} - v'\overline{w'} \right) &= \varrho X - \frac{\partial q}{\partial x} + \mu \cdot \Delta u' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(u'\overline{w'} - w'\overline{u'} \right) &= \varrho Y - \frac{\partial q}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v' \,, \\
-\varrho u_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + \varrho \cdot \left(v'\overline{u'} - u'\overline{v'} \right) &= \varrho Z - \frac{\partial q}{\partial z} + \mu \cdot \Delta w' \,, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist:

$$
\begin{aligned}
\overline{u'} &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \,, \\
\overline{v'} &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \,, \\
\overline{w'} &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \,, \\
q &= p + \frac{1}{2}\varrho \cdot \left(u'^2 + v'^2 + w'^2 \right) \,.
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen Nebenbedingungen sind:

1. für $R = \infty$: $u' = v' = w' = 0$.

Von dem so erhaltenen Systeme von Differentialgleichungen gehen wir zu den entsprechenden Integralgleichungen über. Wenn S eine geschlossene Fläche ist, welche in jedem Punkte eine stetige Tangentenebene besitzt, und welche den Raum in nur zwei Teile zerlegt, so muss[6], wenn x_0, y_0, z_0 ein beliebiger Punkt innerhalb

[6] Vgl. Teil II, Seite 13 und Seite 29

S ist:

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu u'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\int_\Omega (u_{11}X' + u_{12}Y' + u_{13}Z')\,\mathrm{d}\omega \\
& + \varrho u_0\cdot\int_S (u'u_{11} + v'u_{12} + w'u_{13})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_S (u'_n p_1 - u_{1,n}q)\,\mathrm{d}s \\
& + \mu\cdot\int_S \left[u'\frac{\mathrm{d}u_{11}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{11}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots\right]\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu v'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\int_\Omega (u_{21}X' + u_{22}Y' + u_{23}Z')\,\mathrm{d}\omega \\
& + \varrho u_0\cdot\int_S (u'u_{21} + v'u_{22} + w'u_{23})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_S (u'_n p_2 - u_{2,n}q)\,\mathrm{d}s \\
& + \mu\cdot\int_S \left[u'\frac{\mathrm{d}u_{21}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{21}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots\right]\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\pi\mu w'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\int_\Omega (u_{31}X' + u_{32}Y' + u_{33}Z')\,\mathrm{d}\omega \\
& + \varrho u_0\cdot\int_S (u'u_{31} + v'u_{32} + w'u_{33})\cos(nx)\,\mathrm{d}s + \int_S (u'_n p_3 - u_{3,n}q)\,\mathrm{d}s \\
& + \mu\cdot\int_S \left[u'\frac{\mathrm{d}u_{31}}{\mathrm{d}n} + \cdots - u_{31}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} - \cdots\right]\mathrm{d}s\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\pi q(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\int_\Omega \left[X'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + Z'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\omega \\
& + \varrho u_0\cdot\int_S \left[u'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + v'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + w'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cos(nx)\,\mathrm{d}s \\
& - \int_S \left[q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right) + \varrho u_0 u'_n\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s \\
& + \mu\cdot\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}n}\right. \\
& \left. -u'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - v'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - w'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist Ω der Teil des Raumes, der innerhalb S liegt. Die Normale wird nach außen gezogen. X', Y', Z' sind Abkürzungen für:

$$\begin{aligned} X' &= X + v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\,, \\ Y' &= Y + w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\,, \\ Z' &= Z + u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\,. \end{aligned}$$

u_{ik} und p_i werden folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\,, \\ u_{22} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,, \\ u_{33} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,, \\ u_{23} = u_{32} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\,, \\ u_{31} = u_{13} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x}\,, \\ u_{12} = u_{21} &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho u_0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta\Phi\right)\,, \\ p_2 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho u_0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta\Phi\right)\,, \\ p_3 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho u_0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \mu \cdot \Delta\Phi\right)\,. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \cdot \iiint e^{-\gamma\cdot(\bar{r}_0 - \xi + x_0)} \cdot \frac{1}{\bar{r}_0} \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_0}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

wo die Integration über den ganzen Raum ausgedehnt wird, und:

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \\ \bar{r}_0^2 &= (\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\gamma = \frac{\varrho u_0}{2\mu}$$

ist. Wir sind von den NAVIER'schen Differentialgleichungen ausgegangen und sind von da aus zu den Integralgleichungen gelangt. Wie ich in meiner Abhandlung „*Über die Bedeutung der Integralgleichungen in der Theorie der Bewegung einer reibenden Flüssigkeit*“[7] gezeigt habe, ist aber der Weg über die NAVIER'schen Differentialgleichungen ein unnötiger Umweg. Man kann von den physikalischen Grundhypothesen direkt zu den Integralgleichungen übergehen, und die Integralgleichungen sind im Grunde nichts anderes als der sinngemäße Ausdruck der physikalischen Grundhypothesen. Man gewinnt dadurch den Vorteil, sich gar nicht um die Ableitungen zweiter Ordnung von u, v, w nach x, y, z zu kümmern zu brauchen. Dem entsprechend wollen wir uns weiterhin nicht mit den NAVIER'schen Differentialgleichungen beschäftigen.

In unseren Integralgleichungen ist die Fläche S enthalten. Wir wollen jetzt diese Fläche in allen Richtungen ins Unendliche rücken lassen. Wir beschränken uns auf solche Lösungen unserer Integralgleichungen, für welche die in diesen vorkommenden Flächenintegrale bei diesem Grenzübergang gegen Null konvergieren. Wir gelangen dann zu der folgenden mathematischen Aufgabe: ein System von Lösungen zu den Integralgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\mu u'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\iiint_\infty (u_{11}X + u_{12}Y + u_{13}Z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ & + \varrho\cdot\iiint_\infty \left[\left(v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\right)u_{11} + \left(w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\right)u_{12}\right. \\ & \left. + \left(u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\right)u_{13}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\mu v'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\iiint_\infty (u_{21}X + u_{22}Y + u_{23}Z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ & + \varrho\cdot\iiint_\infty \left[\left(v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\right)u_{21} + \left(w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\right)u_{22}\right. \\ & \left. + \left(u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\right)u_{23}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\mu w'(x_0,y_0,z_0) = {} & \varrho\cdot\iiint_\infty (u_{31}X + u_{32}Y + u_{33}Z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ & + \varrho\cdot\iiint_\infty \left[\left(v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\right)u_{31} + \left(w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\right)u_{32}\right. \\ & \left. + \left(u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\right)u_{33}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

[7] Arkiv för mathematik, astronomi och fysik. Band 6. Nr. 23

$$
\left.
\begin{aligned}
4\pi q(x_0, y_0, z_0) = \varrho \cdot \iiint_\infty \Bigg[& X \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + Y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \\
& + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
& + \varrho \cdot \iiint_\infty \Bigg[\left(v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \\
& + \left(w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \\
& + \left(u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\right) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

zu suchen, für welche die oben erwähnten Flächenintegrale bei dem Grenzübergange verschwinden.
Gleichung 9, Gleichung 10 und Gleichung 11 bilden offenbar ein in sich geschlossenes System.

7. Eigenschaften der Funktionen $\mathbf{u_{ik}}$

Die Funktion Φ verhält sich in der Umgebung von dem Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ wie $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Man schließt daraus, dass man eine solche positive Größe a finden kann, dass in einem gewissen Bereiche um den Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ herum gilt:

$$
|u_{ik}| < \frac{a}{r} \, .
$$

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, zu untersuchen, wie die Funktionen u_{ik} sich für große Werte von r verhalten.
In meiner ersten Mitteilung habe ich die Formeln angegeben:[8]

$$
\Phi(x, y, z) - \Phi(x', y, z) = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{x'}^{x} \left(e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} - 1\right) \frac{\mathrm{d}x}{r} \, ,
$$

[8] Siehe Teil II, Seite 22

und:

$$u_{11} = \frac{2 \cdot e^{-\gamma \cdot (r-x+x_0)}}{r} - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-\gamma \cdot (r-x+x_0)} - 1}{r} \right) ,$$
$$u_{12} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-\gamma \cdot (r-x+x_0)} - 1}{r} \right) ,$$
$$u_{13} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-\gamma \cdot (r-x+x_0)} - 1}{r} \right) .$$

Aus diesen Formeln geht unmittelbar hervor, dass man eine solche positive Größe A_1 finden kann, dass für alle Werte von x, y, z; x_0, y_0, z_0 gilt:

$$|u_{1k}| < \frac{A_1}{r \cdot (r - x + x_0)} , \quad (k = 1, 2, 3) .$$

Wir wollen zeigen, dass man A_1 so wählen kann, dass:

$$|u_{ik}| < \frac{A_1}{r \cdot (r - x + x_0)} , \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

gilt. Wir zeigen zu dem Zweck zunächst, dass:

$$\lim_{r=\infty} u_{ik} = 0 , \quad (i, k = 2, 3) .$$

Um dieses zu zeigen, hat man wiederum nur nötig zu beweisen, dass:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \lim_{r=\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \lim_{r=\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \, \partial z} = 0 .$$

Wir gehen von der Definitionsgleichung:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \cdot \iiint e^{-\gamma \cdot (\bar{r}_0 - \xi + x_0)} \cdot \frac{1}{\bar{r}_0} \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_0} \right) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta$$

aus, wobei $\bar{r}$ wie auf Seite 17 angegeben definiert ist. Wir legen in dem $\xi\eta\zeta$-Raume um den Punkt x, y, z herum eine geschlossene Fläche, welche den Raum in nur zwei Teile zerlegt. Dadurch wird auch die Funktion Φ in zwei Teile zerlegt. Diese Teile können in Bezug auf x, y, z deriviert werden, wobei jedoch der Unterschied stattfindet, dass man in dem einen Teile beliebig oft unter dem Integralzeichen derivieren kann, während dies in dem anderen Teile nicht gestattet ist. Nach vollendetem Derivieren lasse ich die geschlossene Fläche, welche bis dahin von x, y, z unabhängig war, mit einer Kugel mit x, y, z als Mittelpunkt und mit dem Radius

$$\kappa \equiv \sqrt{ar}$$

zusammenfallen. a ist dabei eine beliebige positive Größe. Es wird angenommen, dass $r > a$ ist. Durch eine zweite Kugel mit dem Mittelpunkte x_0, y_0, z_0 und dem Radius $r + \sqrt{ar}$ zerlege ich ferner das eine von meinen Integralen in zwei. Ich habe dann z.B.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{I}} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{II}} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{III}},$$

wo ich mit dem *Index* ***I*** denjenigen Teil meiner Funktion bezeichne, der von dem Raumgebiete innerhalb der ersten Kugel herrührt, mit dem *Index* ***II*** denjenigen Teil, der von dem zwischen den beiden Kugeln liegenden Raumgebiete herrührt, endlich mit dem *Index* ***III*** denjenigen Teil, der von dem außerhalb der zweiten Kugel liegenden Raumgebiete herrührt.
Wir haben jetzt, wenn wir die Rechnungen für die Funktion $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ durchführen wollen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{I}} &= \lim_{\kappa=\sqrt{ar}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} -\frac{e^{-\gamma\cdot(\bar{r}_0-\xi+x_0)}}{2\pi\bar{r}_0} \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_0}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa=\sqrt{ar}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} \frac{Q}{\bar{r}_0} \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}_0}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,,\end{aligned}$$

wenn wir der Kürze wegen für

$$e^{-\gamma\cdot(\bar{r}_0-\xi+x_0)} \equiv Q$$

schreiben.
Folglich ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{I}} &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa=\sqrt{ar}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} \frac{Q}{\bar{r}_0} \cdot \frac{\eta - y}{\bar{r}^3} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa=\sqrt{ar}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-\int_{\bar{r}=\kappa} \frac{Q}{\bar{r}_0\bar{r}} \cdot \cos(n_y y)\,\mathrm{d}s + \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{\bar{r}_0}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa=\sqrt{ar}} \left[\int \frac{Q}{\bar{r}_0} \frac{(y-\eta)}{\bar{r}^3} \cdot \cos(n_y y)\,\mathrm{d}s - \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} \frac{(y-\eta)}{\bar{r}^3} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{\bar{r}_0}\right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\right].\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\left|\int_{\bar{r}=\sqrt{ar}} \frac{Q}{\bar{r}_0} \frac{(y-\eta)}{\bar{r}^3} \cdot \cos(n_y y)\,\mathrm{d}s\right| < \text{Max.} \left(\frac{4\pi}{\bar{r}_0}\right)_{\bar{r}=\sqrt{ar}} = \frac{4\pi}{r - \sqrt{ar}}$$

und ferner:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{\bar{r}_0}\right)\right| = \left|-\frac{(\eta - y_0)}{\bar{r}_0^3} \cdot Q - \gamma \cdot \frac{(\eta - y_0)}{\bar{r}_0^2} \cdot Q\right| < \frac{Q}{\bar{r}_0^2} + \gamma \cdot \frac{Q}{\bar{r}_0}$$

und daher also (wenn $\kappa < r$):

$$\begin{aligned}\left|\iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa} \frac{(y-\eta)}{\bar{r}^3}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{\bar{r}_0}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\right| &< \iiint_{\bar{r}\leqslant\kappa}\left(\frac{1}{\bar{r}_0^2}+\frac{\gamma}{\bar{r}_0}\right)\cdot\frac{Q}{\bar{r}^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &< \left[\frac{1}{(r-\kappa)^2}+\frac{\gamma}{(r-\kappa)}\right]\iiint\frac{1}{\bar{r}^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 4\pi\cdot\left[\frac{\kappa}{(r-\kappa)^2}+\frac{\gamma\kappa}{(r-\kappa)}\right].\end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\left|\lim_{\kappa=\sqrt{ar}}\iiint\frac{(y-\eta)}{\bar{r}^3}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{\bar{r}_0}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\right| < \frac{4\pi\sqrt{a}}{\sqrt{r}-\sqrt{a}}\cdot\left[\frac{1}{r-\sqrt{ar}}+\gamma\right].$$

Wir haben weiter:

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{II}} = \iiint\frac{Q}{\bar{r}_0}\cdot\left(\frac{1}{\bar{r}^3}-\frac{3\cdot(y-\eta)^2}{\bar{r}^5}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Also:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{II}}\right| &< 2\cdot\iiint\frac{Q}{\bar{r}_0\bar{r}^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta < \frac{2}{\sqrt{(ar)^3}}\cdot\iiint\frac{Q}{\bar{r}_0}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &< \frac{2}{\sqrt{(ar)^3}}\cdot\iiint_{\bar{r}\leqslant r+\kappa}\frac{Q}{\bar{r}_0}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{(ar)^3}}\cdot\int_0^{r+\kappa}\mathrm{d}\bar{r}_0\int e^{-\gamma\bar{r}_0\cdot(1-\cos(\vartheta))}\cdot\bar{r}_0\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{4\pi}{\gamma\sqrt{(ar)^3}}\cdot\int_0^{r+\kappa}\left(1-e^{-2\gamma\bar{r}_0}\right)\mathrm{d}\bar{r}_0 < \frac{4\pi\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{r}}\right)}{\gamma\sqrt{a^3}\sqrt{r}}\,.\end{aligned}$$

Wir haben endlich:

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{III}} = \iiint_{\mathrm{III}}\frac{Q}{\bar{r}_0}\cdot\left(\frac{1}{\bar{r}^3}-\frac{3\cdot(y-\eta)^2}{\bar{r}^5}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

und also:

$$\left|\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{III}}\right| < 2\cdot\iiint\frac{Q}{\bar{r}_0\cdot\bar{r}^3}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Nun gilt in dem Gebiete III die Ungleichung:

$$\frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} \leqslant \frac{r+\sqrt{ar}}{\sqrt{ar}} < \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{a}}\,.$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{III}}\right| &< \frac{2\cdot\left(\sqrt{r}+\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt{a^3}}\cdot\iiint\frac{Q}{\bar{r}_0^4}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\\ &< \frac{4\pi\cdot\left(\sqrt{r}+\sqrt{a}\right)^3}{\gamma\sqrt{a^3}}\cdot\int_{r+\kappa}^{\infty}\frac{1}{\bar{r}_0^3}\,\mathrm{d}\bar{r}_0\\ &= \frac{2\pi\cdot\left(\sqrt{r}+\sqrt{a}\right)^3}{\gamma\sqrt{a^3}r} < \frac{4\pi}{\gamma\sqrt{a^3}\sqrt{r}}\,.\end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt:

$$\lim_{r=\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0\,.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass:

$$\begin{aligned}\lim_{r=\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}&=0\,,\\ \lim_{r=\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}&=0\,.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung:

$$\lim_{r=\infty}u_{ik}=0\,,\quad (i,k=2,3)$$

bewiesen.
Mit Hilfe des jetzt dargelegten Theorems können wir neue und einfachere Ausdrücke für die Funktionen $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}$ und damit auch für die Funktionen u_{ik} $(i,k=2,3)$ angeben. Wir haben z.B.:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}=-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}}{r}\right)$$

und also:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\int_{x=-\infty}^{x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\gamma}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-e^{-\gamma\cdot(r'-\xi+x_0)}}{r'}\right)\mathrm{d}\xi\,,\qquad(13)$$

wenn:

$$r'^2=(\xi-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\,.$$

Andrerseits haben wir auch

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\int_{x=+\infty}^{x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\gamma}\cdot\int_{x}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-e^{-\gamma\cdot(r'-\xi+x_0)}}{r'}\right)\mathrm{d}\xi\,,\qquad(14)$$

u.s.w.
Wir verwenden diese (und die analogen) Ausdrücke, um näher zu untersuchen, wie die Funktionen $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}$ und damit auch $u_{ik}(i,k=2,3)$ sich für große Werte von r verhalten. Wir betrachten z.B. $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$. Es sei zunächst $x \leqslant x_0$. Wir verwenden den ersten in Gleichung 13 angegebenen Ausdruck für $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$. Wir haben, wenn wir für

$$e^{-\gamma\cdot(r'-\xi+x_0)} \equiv Q'$$

schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-Q'}{r'}\right) &= (1-Q')\cdot\left(-\frac{1}{r'^3}+\frac{3\cdot(y-y_0)^2}{r'^5}\right)\\ &\quad -2\gamma\cdot\frac{(y-y_0)^2}{r'^4}Q'-\gamma^2\cdot\frac{(y-y_0)^2}{r'^3}Q'+\frac{\gamma}{r'^2}Q'\,.\end{aligned}$$

Nun ist für $x \leqslant x_0$:

$$\left|\int_{-\infty}^{x}(1-Q')\cdot\left(\frac{1}{r'^3}-\frac{3\cdot(y-y_0)^2}{r'^5}\right)\mathrm{d}\xi\right| < 2\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{r'^3}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{r\cdot(r-x+x_0)} \leqslant \frac{2}{r^2}\,.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\frac{(y-y_0)^2Q'}{r'^2}\,\mathrm{d}\xi &\leqslant \int_{-\infty}^{x}\left[(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\frac{Q'}{r'^2}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{-\infty}^{x}\left(1-\frac{\xi-x_0}{r'}\right)\cdot\left(1+\frac{\xi-x_0}{r'}\right)Q'\,\mathrm{d}\xi\\ &< \int_{-\infty}^{x}\frac{r'-\xi+x_0}{r'}Q'\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\gamma}\cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}\,.\end{aligned}$$

Endlich

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{Q'}{r'^2}\,\mathrm{d}\xi < \frac{1}{r^2}\cdot\int_{-\infty}^{x}\frac{r'-\xi+x_0}{r'}Q'\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\gamma r^2}\cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}\,.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, da nach unseren Annahmen auf dem Integrationswege $r' \geqslant r$ ist:

$$\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right| < \frac{5}{\gamma r^2}+\frac{1}{r}\cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}$$

für $x \leqslant x_0$.
Es sei jetzt $x > x_0$. Wir verwenden Gleichung 14 für $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$. Wir setzen also

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_x^\infty \Bigg[&(1 - Q') \cdot \left(-\frac{1}{r'^3} + \frac{3 \cdot (y - y_0)^2}{r'^5} \right) \\ &-2\gamma \cdot \frac{(y - y_0)^2}{r'^4} Q' - \gamma^2 \cdot \frac{(y - y_0)^2}{r'^3} Q' + \gamma \cdot \frac{Q'}{r'^2} \Bigg] \, \mathrm{d}\xi \,.\end{aligned}$$

Wir haben:

$$\left| \int_x^\infty (1 - Q') \cdot \left(-\frac{1}{r'^3} + \frac{3 \cdot (y - y_0)^2}{r'^5} \right) \mathrm{d}\xi \right| < 2 \cdot \int_x^\infty \frac{1}{r'^3} \, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{r \cdot (r + x - x_0)} \leqslant \frac{2}{r^2} \,,$$

$$\begin{aligned}&\int_x^\infty \frac{(y - y_0)^2}{r'^3} Q' \, \mathrm{d}\xi < 2 \cdot \int_x^\infty \left(1 - \frac{\xi - x_0}{r'} \right) \cdot \frac{Q'}{r'} \, \mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{2}{\gamma r} \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} + \frac{2}{\gamma} \cdot \int_x^\infty \frac{\xi - x_0}{r'^3} Q' \, \mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{2}{\gamma r} \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} - \frac{2}{\gamma} \cdot \int_x^\infty \frac{r' - \xi + x_0}{r'^3} Q' \, \mathrm{d}\xi + \frac{2}{\gamma} \cdot \int_x^\infty \frac{Q'}{r'^2} \, \mathrm{d}\xi \,.\end{aligned}$$

Also:

$$\int_x^\infty \frac{(y - y_0)^2}{r'^3} Q' \, \mathrm{d}\xi < \frac{2}{\gamma r} \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} + \frac{2}{\gamma^2 r^2} \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} + \frac{2}{\gamma} \cdot \int_x^\infty \frac{Q'}{r'^2} \, \mathrm{d}\xi \,.$$

Um endlich zu untersuchen, wie sich das Integral:

$$\int_x^\infty \frac{Q'}{r'^2} \, \mathrm{d}\xi$$

für große Werte von r verhält ($x > x_0$), setzen wir

$$\eta = r' - \xi + x_0$$

und bekommen:

$$\int_x^\infty \frac{Q'}{r'^2} \, \mathrm{d}\xi = \int_0^{r - x + x_0} \frac{1}{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \eta^2} \cdot e^{-\gamma \eta} \, \mathrm{d}\eta \,.$$

Wir setzen der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \,, \\ x - x_0 &= r \cdot \cos(\vartheta) \quad \left(0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2} \right) \,,\end{aligned}$$

und haben dann die Funktion:

$$\mathbf{I} = \int_0^{r\cdot(1-\cos(\vartheta))} \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\vartheta) + \eta^2} \cdot e^{-\gamma\eta}\, \mathrm{d}\eta \tag{15}$$

zu untersuchen.
Wir bemerken zunächst, dass:

$$\mathbf{I} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma\eta}}{r^2 \cdot \sin^2(\vartheta)}\, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\gamma r^2 \cdot \sin^2(\vartheta)}\,,$$

und dass:

$$\mathbf{I} \leqslant \int_0^{r\cdot(1-\cos(\vartheta))} \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2(\vartheta)}\, \mathrm{d}\eta = \frac{1-\cos(\vartheta)}{r \cdot \sin^2(\vartheta)}\,.$$

Wir ersehen aus diesen Ungleichungen, dass wenn der Punkt x, y, z sich von dem Punkte x_0, y_0, z_0 in einer anderen Richtung als der der x-Achse entfernt, $\mathbf{I}$ mindestens so stark wie $\frac{a}{r^2}$ gegen Null abnimmt, wenn aber die Entfernung parallel der x-Achse geschieht, dagegen mindestens so stark wie $\frac{a}{r}$. Man zeigt ferner leicht, dass, wenn $\vartheta > 0$, $\mathbf{I}r^2$ gegen einen endlichen Grenzwert, nicht Null, konvergiert, wenn r über alle Grenzen wächst, während, wenn $\vartheta = 0$, dasselbe von $\mathbf{I}r$ gilt. Was uns übrig bleibt, ist eine Gleichung aufzufinden, aus welcher das Verhalten der Funktion $\mathbf{I}$ sowohl für $\vartheta > 0$, wie für $\vartheta = 0$ geschlossen werden kann. Wir bemerken zu dem Zweck, dass man eine solche positive Größe a finden kann, dass für alle positiven Werte von η:

$$e^{-\gamma\eta} < \frac{a}{1+\eta^2}\,.$$

gilt. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &< a \cdot \int_0^{r\cdot(1-\cos(\vartheta))} \frac{1}{\left(r^2 \cdot \sin^2(\vartheta) + \eta^2\right) \cdot (1+\eta^2)}\, \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{a}{1 - r^2 \sin^2(\vartheta)} \cdot \int_0^{r\cdot(1-\cos(\vartheta))} \left\{ \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \arctan\left(\frac{\eta}{r \cdot \sin(\vartheta)}\right) - \arctan(\eta) \right\} \\
&= \frac{a}{r \cdot \sin(\vartheta) \cdot (1 + r \cdot \sin(\vartheta))} \cdot \int_0^{r\cdot(1-\cos(\vartheta))} \frac{1}{\frac{\eta}{r\cdot\sin(\vartheta)} - \eta} \cdot \left\{ \frac{\eta}{r \cdot \sin(\vartheta)} \right. \\
&\left. \cdot \arctan\left(\frac{\eta}{r \cdot \sin(\vartheta)}\right) - \eta \cdot \arctan(\eta) \right\}\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion:

$$\frac{1+x+y}{(x+y)} \cdot \frac{x \cdot \arctan(x) - y \cdot \arctan(y)}{(x-y)}$$

ist für positive Werte der Veränderlichen, inkl. die Werte 0 und ∞, endlich, stetig und positiv. Es sei a_1 eine positive Zahl, größer als der grösste Wert, welchen die

Funktion für die erwähnten Werte der Variablen annimmt. Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &< \frac{a \cdot a_1}{r \cdot \sin(\vartheta) \cdot (1 + r \cdot \sin(\vartheta))} \cdot \int_0^{r \cdot (1-\cos(\vartheta))} \frac{\frac{\eta}{r \cdot \sin(\vartheta)} + \eta}{1 + \frac{\eta}{r \cdot \sin(\vartheta)} + \eta} \\
&= \frac{a a_1 \cdot (1 - \cos(\vartheta))}{r \cdot \sin(\vartheta) \cdot [\sin(\vartheta) + (1 + r \cdot \sin(\vartheta)) \cdot (1 - \cos(\vartheta))]} \\
&= \frac{a \cdot a_1}{2r \cdot \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + (1 + r \cdot \sin(\vartheta)) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]} < \frac{a \cdot a_1}{r \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]}\,, \\
&\quad \text{mit} \quad \left(0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Wir haben also das Ergebnis:

$$\int_x^\infty \frac{Q'}{r'^2}\,\mathrm{d}\xi < \frac{a \cdot a_1}{r \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]}$$

erhalten. Diese Ungleichung in Verbindung mit den oben Abgeleiteten zeigt, dass man eine solche positive Größe a (wir bezeichnen hier und im Folgenden mit a eine positive Größe, deren Betrag uns hier nicht näher interessiert) bestimmen kann, dass für $x > x_0$ gilt:

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right| < \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]} = \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r \cdot (1 + r - x + x_0)}\,.$$

Aus der für $x \leqslant x_0$ geltenden Ungleichung geht hervor, dass man a so gross wählen kann, dass diese Ungleichung auch für $x \leqslant x_0$ gilt. Nun wissen wir aber, dass die Funktion:

$$r \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

auch in der Umgebung des singulären Punktes $x = x_0$, $y = y_0$ $z = z_0$ endlich bleibt. Wir schließen hieraus, dass man a so groß wählen kann, dass für jedes Wertsystem x, y, z gilt:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} < \frac{a}{r \cdot (1 + r - x + x_0)}\,.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ eine ähnliche Ungleichung erfüllt. Was endlich $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}$ betrifft, kann auch diese Funktion auf dieselbe Weise untersucht werden, wenn man nur die Ungleichungen:

$$\left|\int_{-\infty}^x \frac{(y - y_0) \cdot (z - z_0)}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^x \frac{(y - y_0)^2}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi \cdot \int_{-\infty}^x \frac{(z - z_0)^2}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi\,,$$

$$\left|\int_x^{-\infty} \frac{(y - y_0) \cdot (z - z_0)}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi\right|^2 \leqslant \int_x^{-\infty} \frac{(y - y_0)^2}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi \cdot \int_x^{-\infty} \frac{(z - z_0)^2}{r'^3} Q'\,\mathrm{d}\xi$$

zu Hilfe nimmt. Wir haben damit den Satz bewiesen: es gibt eine solche positive Größe A_1, dass für alle x, y, z gilt:

$$|u_{ik}| < \frac{A_1}{r \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]} = \frac{A_1}{r \cdot (1 + r - x + x_0)} \,.$$

Aus den obigen Rechnungen geht ohne jegliche Schwierigkeit hervor, dass man A_1 so wählen kann, dass man überdies:

$$\left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial z}\right| \leqslant \frac{A_1}{r \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]} + \frac{A_1}{r^2}$$

hat.
Ich schließe diesen Paragraphen mit einer Bemerkung über die Funktionen $\overline{u}_{ik}$:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{i1} &= \frac{\partial u_{i3}}{\partial y} - \frac{\partial u_{i2}}{\partial z} \,, \\
\overline{u}_{i2} &= \frac{\partial u_{i1}}{\partial z} - \frac{\partial u_{i3}}{\partial x} \,, \\
\overline{u}_{i3} &= \frac{\partial u_{i2}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i1}}{\partial y} \,, \quad (i = 1, 2, 3) \,.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte von den Funktionen u_{ik} ergibt:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{11} &= 0 & \overline{u}_{12} &= \frac{\partial}{\partial z}\Delta\Phi \\
\overline{u}_{13} &= -\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi & \overline{u}_{21} &= -\frac{\partial}{\partial z}\Delta\Phi \\
\overline{u}_{22} &= 0 & \overline{u}_{23} &= \frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi \\
\overline{u}_{31} &= \frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi & \overline{u}_{32} &= -\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi \\
\overline{u}_{33} &= 0
\end{aligned}$$

Da:

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r} \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} \,,$$

so folgt z.B:

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{12} &= -\left(\frac{2\gamma \cdot (z - z_0)}{r^2} + \frac{2 \cdot (z - z_0)}{r^3}\right) \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} \,, \\
\overline{u}_{23} &= \left(\frac{2\gamma \cdot (r - x + x_0)}{r^2} - \frac{2 \cdot (x - x_0)}{r^3}\right) \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)}
\end{aligned}$$

u.s.w. Wir schließen hieraus, dass:

$$|\overline{u}_{ik}| < \left(\frac{2\sqrt{2} \cdot \gamma \cdot \sqrt{1 - \cos(\vartheta)}}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \cdot e^{-\gamma \cdot (r - x + x_0)} .$$

Zum Beweise braucht man nur zu bemerken, dass:

$$\left| \frac{(z - z_0)}{r} \right| \leqslant \sin(\vartheta) \leqslant \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\vartheta))} , \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$$

u.s.w.

8. Grundlegende Ungleichungen

Wir bezeichnen in diesem Paragraphen mit ψ eine Funktion von x, y, z, welche im ganzen Raume endlich, eindeutig und abteilungsweise stetig ist und welche der Ungleichung:

$$|\psi| < k' \cdot \left\{ \frac{\sqrt{1 + \cos(\vartheta_1)}}{(1 + R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1 + R)^{2+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma \cdot (R + x)}$$

genügt. Hier ist:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\cos(\vartheta_1) = \frac{x}{R} , \quad (0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \pi) ,$$

und

$$0 < \alpha < \frac{1}{8} ,$$
$$0 < \beta < \frac{1}{8} .$$

k' ist eine positive Konstante.– Wir stellen uns die Aufgabe, die Funktionen (von x_0, y_0, z_0):

$$\iiint_\infty u_{ik} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z ,$$
$$\iiint_\infty \overline{u}_{ik} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

zu untersuchen. Wir bemerken zunächst, dass sie für alle Werte von x_0, y_0, z_0 endlich und stetig sind. Was uns übrig bleibt, ist zu untersuchen, wie sie sich für große Werte von R_0 ($R_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$) verhalten.
Wir betrachten zuerst die Integrale von dem ersten Typus und haben also das Integral:

$$\iiint \left[\frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta)}}{(1+R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \right] \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{r\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

zu untersuchen. Wir betrachten zuerst das Integral:

$$\iiint_\infty \frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_1)}\cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}\cdot r\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

1. Um den Punkt x_0, y_0, z_0 herum lege ich eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}R_0$ und bezeichne mit $\mathbf{I}_1$ denjenigen Teil unseres Integrals, der von dem Inneren der Kugel herrührt. Wir haben dann nach der Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1^2 \leqslant & \iiint_{\mathbf{I}} \frac{(1+\cos(\vartheta_1))\cdot e^{-2\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))}}{(1+R)^{2\cdot(2-\alpha)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
& \cdot \iiint_{\mathbf{I}} \frac{1}{r^2\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
< & \frac{2^{2\cdot(2-\alpha)}}{(1+R_0)^{2\cdot(2-\alpha)}} \cdot \iiint_{\mathbf{I}} (1+\cos(\vartheta_1))\cdot e^{-2\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
& \cdot \iiint_{\mathbf{I}} \frac{1}{r^2\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Um eine obere Grenze für das erste Integral zu bestimmen, führen wir Polarkoordinaten ein und bekommen:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\mathbf{I}} (1+\cos(\vartheta_1))\cdot e^{-2\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
& < 2\pi\cdot\int_{\frac{1}{2}R_0}^{\frac{3}{2}R_0} R^2\,\mathrm{d}R \int_0^\pi (1+\cos(\vartheta_1))\cdot e^{-2\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))}\sin(\vartheta_1)\,\mathrm{d}\vartheta_1 \\
& < 2\pi\cdot\int_{\frac{1}{2}R_0}^{\frac{3}{2}R_0} \mathrm{d}R\cdot\int_0^\infty z\cdot e^{-2\gamma z}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi R_0}{2\gamma^2}\,.
\end{aligned}$$

Um das zweite Integral zu berechnen, führen wir von dem Punkte x_0, y_0, z_0

aus Polarkoordinaten ein. Wir haben:

$$\iiint \frac{1}{r^2 \cdot [1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}R_0} \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + r \cdot (1 - \cos(\vartheta))]^2} \, \mathrm{d}\vartheta$$
$$= 4\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}R_0} \frac{1}{(1 + 2r)} \, \mathrm{d}r = 2\pi \cdot \log(1 + R_0) \, .$$

Wir haben also:

$$\mathbf{I}_1^2 < \frac{2^{2\cdot(1-\alpha)} \cdot \pi^2 \cdot \log(1 + R_0)}{\gamma^2 \cdot (1 + R_0)^{3-2\alpha}} \, .$$

Wenn a eine solche positive Größe ist, dass für $R_0 \geqslant 0$ gilt:

$$\frac{2^{2\cdot(1-\alpha)} \cdot \pi^2 \cdot \log(1 + R_0)}{\gamma^2 \cdot (1 + R_0)^{1-2\alpha}} < a^2 \, ,$$

so folgt:

$$\mathbf{I}_1 < \frac{a}{1 + R_0} \, .$$

2. Wir betrachten jetzt denjenigen Teil, $\mathbf{I}_2$, unseres Integrals, der von dem Raum zwischen der oben erwähnten Kugel und einer neuen Kugel herrührt, die den Mittelpunkt im Anfangspunkte und den Radius $\frac{3}{2}R_0$ hat. Wir haben hier:

$$r \geqslant \frac{1}{2} R_0 \, .$$

Folglich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 &< \frac{2}{R_0} \cdot \iiint_{\mathbf{II}} \frac{\sqrt{1 + \cos(\vartheta_1)}}{(1 + R)^{2-\alpha}} \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&< \frac{4\pi}{R_0} \cdot \int_0^{\frac{3}{2}R_0} \frac{R}{(1 + R)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}R \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos(\vartheta_1)} \cdot e^{-\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))} \cdot \sin(\vartheta_1) \, \mathrm{d}\vartheta_1 \\
&< \frac{4\pi}{R_0} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R} \cdot (1 + R)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}R \cdot \int_0^{\infty} \sqrt{z} \cdot e^{-\gamma z} \, \mathrm{d}z \, .
\end{aligned}$$

3. Wir betrachten endlich den letzten Teil $\mathbf{I}_3$ unseres Integrals. Wir haben außerhalb der zuletzt eingeführten Kugel:

$$\frac{r}{R} \geqslant \frac{1}{3} \, .$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_3 &< 6\pi \cdot \int_{\frac{3}{2}R_0}^{\infty} \frac{1}{(1+R)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}R \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(\vartheta_1)} \cdot e^{-\gamma R\cdot(1+\cos(\vartheta_1))} \cdot \sin(\vartheta_1)\,\mathrm{d}\vartheta_1 \\
&< 6\pi \cdot \int_{\frac{3}{2}R_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R^3}\cdot(1+R)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}R \cdot \int_0^{\infty} \sqrt{z} \cdot e^{-\gamma z}\,\mathrm{d}z \\
&< \frac{12\pi}{\sqrt{R_0}\cdot(1+R_0)^{1-\alpha}} \cdot \int_0^{\infty} \sqrt{z} \cdot e^{-\gamma z}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen für $\mathbf{I}_1$. $\mathbf{I}_2$, und $\mathbf{I}_3$ ist deutlich, dass man eine solche positive Größe a finden kann, dass:

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 < \frac{a}{R_0}\,.$$

Auf analoge Weise zeigt man, dass man a so wählen kann, dass:

$$\iiint \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{r\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < \frac{a}{R_0}\,.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen erhellt, dass man eine solche positive Größe A_2 finden kann, dass:

$$\left|\iiint_{\infty} u_{ik}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| < \frac{k'A_2}{R_0}\,, \quad (i,k=1,2,3)\,.$$

Da aber das Integral links für alle Werte von x_0, y_0, z_0 endlich und stetig ist, so folgt, dass man auch eine solche positive Größe A_3 finden kann, dass:

$$\left|\iiint_{\infty} u_{ik}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| < \frac{k'A_3}{(1+R_0)}\,, \quad (i,k=1,2,3)\,.$$

Wir gehen zu dem Studium der Funktionen:

$$\iiint \overline{u}_{ik}\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

über. Bei diesem Studium haben wir wiederholt einige Hilfssätze zu verwenden, die ich daher hier zusammenstelle. Der Erste ist die schon mehrmals benutzte Schwarz'sche Ungleichung:

$$\left[\int_a^b f_1\cdot f_2\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f_1^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f_2^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Der zweite Hilfssatz betrifft das Integral:

$$J = \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint_{\infty} \frac{e^{-\gamma\cdot(R+r)}}{(1+R)^{1+\beta}\cdot r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Dieses Integral genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial z_0^2} - \gamma^2\cdot J = -\frac{e^{-\gamma\cdot R_0}}{(1+R_0)^{1+\beta}}\,.$$

Aus Symmetriegründen ist ersichtlich, dass J nur von R_0 abhängt. Wir haben also:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R_0^2}\,(R_0 J) - \gamma^2\cdot R_0 J = -\frac{R_0\cdot e^{-\gamma\cdot R_0}}{(1+R_0)^{1+\beta}}\,.$$

Wir setzen:

$$R_0 J = f(R_0)\cdot e^{-\gamma\cdot R_0}$$

und haben dann:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}R_0^2} - 2\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R_0} = -\frac{R_0}{(1+R_0)^{1+\beta}}$$

und also:

$$\frac{\partial f}{\partial R_0} - 2\gamma f = -\int_0^{R_0}\frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi + c\,.$$

Folglich:

$$f = e^{2\gamma R_0}\cdot\int_{R_0}^{\infty} e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\cdot\int_0^{\eta}\frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi + c_1 + c_2\cdot e^{2\gamma R_0}\,.$$

Um die Integrationskonstanten c_1 und c_2 zu bestimmen, bemerken wir, dass:

$$\lim_{R_0=\infty} J = 0\,,\qquad \lim_{R_0=0} R_0 J = 0\,.$$

Wir bekommen hieraus:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0\,,\\ c_1 &= -\int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\cdot\int_0^{\eta}\frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte bekommen wir durch eine einfache Umformung:

$$J = \frac{e^{-\gamma R_0}}{R_0}\cdot\int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\cdot\int_{\eta}^{R_0+\eta}\frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Wenn jetzt zunächst $\beta < 1$ ist, so haben wir ($\eta \geqslant 0$):

$$\int_{\eta}^{R_0+\eta} \frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\eta}^{R_0+\eta} \frac{1}{(1+\xi)^{\beta}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(1-\beta)}\cdot\Big\{(1+R_0+\eta)^{1-\beta} - (1+\eta)^{1-\beta}\Big\}\,.$$

Die Funktion:

$$\frac{e^{-\gamma\eta}}{R_0^{1-\beta}} \cdot \int_{\eta}^{R_0+\eta} \frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi$$

bleibt folglich für alle Werte von η ($\geqslant 0$) unterhalb einer endlichen Grenze, wenn R_0 über alle Grenzen wächst. Man kann folglich eine solche positive Größe a_β finden, dass:

$$J < \frac{a_\beta \cdot e^{-\gamma\cdot R_0}}{R_0^{\beta}}\,,$$

wenn $\beta < 1$.
Wenn $\beta = 1$ ist, so kann man offenbar, wie klein auch die positive Größe ε genommen wird, eine solche positive Größe a_ε finden, dass:

$$J < \frac{a_\varepsilon \cdot e^{-\gamma\cdot R_0}}{R_0^{1-\varepsilon}}\,.$$

Wenn endlich $\beta > 1$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{R_0+\eta} \frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\eta}^{R_0+\eta} \frac{1}{(1+\xi)^{\beta}}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(\beta-1)}\cdot\left\{\frac{1}{(1+\eta)^{\beta-1}} - \frac{1}{(1+\eta+R_0)^{\beta-1}}\right\}\\ &< \frac{1}{(\beta-1)}\cdot\frac{1}{(1+\eta)^{\beta-1}}\,.\end{aligned}$$

Man kann also eine solche positive Größe a finden, dass:

$$J < \frac{a\cdot e^{-\gamma R_0}}{R_0}\,,$$

wenn $\beta > 1$.
Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(J\cdot e^{-\gamma x_0}\right) = -\gamma\cdot&\left(\frac{1}{R_0} + \frac{x_0}{R_0^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{x_0}{R_0^3}\right)\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\\ &\cdot\int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\cdot\int_{\eta}^{R_0+\eta}\frac{\xi}{(1+\xi)^{1+\beta}}\,\mathrm{d}\xi\\ &+\frac{x_0\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}}{R_0^2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{(R_0+\eta)}{(1+R_0+\eta)^{1+\beta}}\cdot e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\,.\end{aligned}$$

Wir schließen aus dieser Gleichung, dass man, wenn $\beta < 1$ ist, eine solche positive

Größe a_β finden kann, dass:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(J\cdot e^{-\gamma x_0}\right)\right| < \frac{a_\beta}{R_0^\beta}\cdot\left(1+\frac{x_0}{R_0}\right)\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} + \frac{a_\beta}{R_0^{1+\beta}}\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

Wenn $\beta = 1$ ist, so kann man, wie klein auch die positive Größe ε genommen wird, eine solche positive Zahl a_ε bestimmen, dass

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(J\cdot e^{-\gamma x_0}\right)\right| < \frac{a_\varepsilon}{R_0^{1-\varepsilon}}\cdot\left(1+\frac{x_0}{R_0}\right)\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} + \frac{a_\varepsilon}{R_0^2}\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

Wenn $\beta > 1$ ist, so kann man eine solche positive Größe a finden, dass:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(J\cdot e^{-\gamma x_0}\right)\right| < \frac{a}{R_0}\cdot\left(1+\frac{x_0}{R_0}\right)\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} + \frac{a}{R_0^2}\cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

In den nachfolgenden Rechnungen kommt auch ein mit J eng verwandtes Integral,

$$K = \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint_\infty \frac{e^{-\gamma\cdot(R+r)}}{Rr^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

vor. Um dieses Integral zu untersuchen, betrachten wir eine etwas allgemeinere Funktion:

$$K(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint_\infty \frac{e^{-\gamma\cdot(R_1+r)}}{R_1r^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

wobei:

$$R_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\ .$$

$K(x_1,y_1,z_1)$ ist dann eine Funktion von x_1, y_1, z_1 und von x_0, y_0, z_0. Der absolute Betrag dieser Funktion wächst über alle Grenzen, wenn R_{10} , der Abstand zwischen den Punkten x_1, y_1, z_1 und x_0, y_0, z_0, gegen Null konvergiert. Man überzeugt sich leicht, dass K in der Umgebung des singulären Punktes sich wie die Funktion $\log\left(\frac{1}{R_{10}}\right)$ verhält und dass also:

$$\lim_{R_{10}=0}\left(R_{10}^{1-\varepsilon}\cdot K\right) = 0\,,\quad (0\leqslant\varepsilon<1)\,.$$

Um jetzt $K(x_1,y_1,z_1)$ zu untersuchen, gehen wir denselben Weg wie früher bei der Untersuchung von J, nur mit dem Unterschied, dass wir K als eine Funktion von x_1, y_1, z_1 auffassen. Wir erhalten:

$$K = \frac{g\left(R_{10}\right)\cdot e^{-\gamma R_{10}}}{R_{10}}$$

mit

$$g\left(R_{10}\right) = e^{2\gamma R_{10}} \cdot \int_{R_{10}}^{\infty} e^{-2\gamma\eta} \cdot \log(\eta)\,\mathrm{d}\eta + c_1 + c_2 \cdot e^{2\gamma R_0}\,.$$

Ebenso wie früher findet man:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0\,, \\ c_1 &= -\int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta} \cdot \log(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,. \end{aligned}$$

Also:

$$K = \frac{e^{-\gamma R_{10}}}{R_{10}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta} \cdot \log\left(1 + \frac{R_{10}}{\eta}\right)\mathrm{d}\eta\,,$$

oder wenn wir jetzt $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ setzen und damit zur ursprünglichen K-Funktion zurückkehren:

$$K = \frac{e^{-\gamma \cdot R_0}}{R_0} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\gamma\eta} \cdot \log\left(1 + \frac{R_0}{\eta}\right)\mathrm{d}\eta\,.$$

Durch partielle Integration überzeugt man sich leicht, dass K in der Umgebung von $R_0 = 0$ wie $\log\left(\frac{1}{R_0}\right)$ unendlich wird. Wenn jetzt a_ε eine solche positive Größe ist, dass:

$$\frac{\log\left(1 + \frac{R_0}{\eta}\right)}{\left(1 + \frac{R_0}{\eta}\right)^{\varepsilon}} < a_\varepsilon\,, \qquad \left(\frac{R_0}{\eta} \geqslant 0\right)$$

so folgt:

$$K < \frac{a_\varepsilon \cdot e^{-\gamma R_0}}{R_0^{1-\varepsilon}} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\eta}\right)^{\varepsilon} \cdot e^{-2\gamma\eta}\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Da, wie wir oben gesehen haben:

$$\lim_{R_0=0} R_0^{1-\varepsilon} \cdot K = 0\,,$$

so folgt, dass wir, wie klein auch die positive Größe ε genommen wird, eine solche positive Größe a_ε bestimmen können, dass:

$$K < \frac{a_\varepsilon \cdot e^{-\gamma R_0}}{R_0^{1-\varepsilon}}\,.$$

Unser letzter Hilfssatz gilt dem Integral:

$$\iiint_{\infty} \frac{1}{(1+R)^{1+\delta} \cdot r^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \quad (0 < \delta < 2)\,.$$

Wie ich an anderem Orte gezeigt habe[9], kann man eine solche positive Größe a bestimmen, dass dieses Integral kleiner als:

$$\frac{a}{(1+R_0)^\delta}$$

ist.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu den Funktionen:

$$\iiint \overline{u}_{ik}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

zurück. Nach unserer Annahme ist:

$$|\psi| < k' \cdot \left\{ \frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_1)}}{(1+R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)}\,,$$

wobei

$$0 < \alpha < \frac{1}{8}\,,$$
$$0 < \beta < \frac{1}{8}\,.$$

Folglich:

$$|\psi| < \frac{3k'}{(1+R)^{2-\alpha}} \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)}\,.$$

Um eine obere Grenze für den absoluten Betrag unserer Funktionen zu finden, haben wir also nur die Integrale

$$\iiint \frac{\sqrt{1-\cos(\vartheta)}}{r} \cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

und:

$$\iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}}{r^2} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

zu untersuchen. Wir betrachten zuerst das erste Integral. Sein Quadrat ist nach der Schwarz'schen Ungleichung kleiner/gleich

$$\iiint \frac{1-\cos(\vartheta)}{r} \cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

[9] Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs application, Acta Math. Tome, 34., p. 264.

und:

$$\mathbf{I}_4 \cdot \mathbf{I}_5 = \iiint \frac{1}{r} \cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_4 = &\iiint \left(\frac{r-x+x_0}{r^2} - \frac{x-x_0}{\gamma r^3}\right) \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &+ \iiint \frac{x-x_0}{\gamma r^3} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

Folglich:

$$\begin{aligned}|\mathbf{I}_4| \leqslant &\frac{1}{\gamma} \cdot \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{(1+R)^{2-\alpha}\cdot r} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\right| \\ &+ \frac{1}{\gamma} \cdot \iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{(1+R)^{2-\alpha}\cdot r^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

Nach unserem zweiten Hilfssatz kann man eine solche positive Zahl a finden, dass das erste Glied rechts kleiner ist als:

$$\frac{a}{R_0^{1-\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{x_0}{R_0}\right) \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} + \frac{a}{R_0^{2-\alpha}} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

Wir haben ferner:

$$\begin{aligned}\left|\iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{r^2\cdot(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right|^2 \leqslant &\iiint \frac{1}{(1+R)^{3-2\alpha}\cdot r^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\cdot \iiint \frac{e^{-2\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{Rr^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

Aus unseren zwei letzten Hilfssätzen folgt, dass man, wenn ε eine positive Größe ist, eine solche positive Zahl a_ε finden kann, dass das rechte Glied kleiner als:

$$\frac{\gamma^2 a_\varepsilon^2}{R_0^{3-2\alpha-\varepsilon}} \cdot e^{-2\gamma\cdot(R_0+x_0)}$$

ist. Folglich:

$$\left|\iiint \frac{(x-x_0)}{\gamma r^3} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| < \frac{a_\varepsilon}{R^{\frac{3}{2}-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

Wir können folglich eine solche positive Größe a_ε finden, dass für genügend große

Werte von R_0:

$$\mathbf{I}_4 < \frac{a_\varepsilon}{R_0^{1-\alpha}} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{x_0}{R_0}\right) + \frac{1}{R_0^{\frac{(1-\varepsilon)}{2}}} \right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} \,.$$

Andrerseits ist nach unserem zweiten Hilfssatz:

$$\mathbf{I}_5 < \frac{a}{R_0^{1-\alpha}} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} \,.$$

Wir setzen jetzt:

$$\varepsilon = 1 - 4 \cdot (\alpha + \beta)$$

und können dann aus unseren Ungleichungen den Schluss ziehen, dass für genügend große Werte von R_0:

$$\iiint \frac{\sqrt{1-\cos(\vartheta)}}{r} \cdot e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$< \frac{a}{R_0^{1-\alpha}} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{x_0}{R_0}} + \frac{1}{R_0^{\alpha+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)} \,.$$

Wir gehen über zu dem Integral:

$$\iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r-x-x_0)}}{r^2} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,.$$

Sein Quadrat ist kleiner als:

$$\iiint \frac{1}{(1+R)^{3-2\alpha} \cdot r^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdot \iiint \frac{e^{-2\gamma\cdot(r+R+x_0)}}{Rr^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,.$$

Wie klein die positive Größe ε auch ist, kann man nach unsren Hilfssätzen a_ε so wählen, dass dieses Produkt kleiner als:

$$\frac{a_\varepsilon^2}{R_0^{3-2\alpha-\varepsilon}} \cdot e^{-2\gamma\cdot(R_0+x_0)}$$

wird. Wir setzen:

$$\varepsilon = 1 - 2 \cdot (\alpha + \beta) \,.$$

Wir sehen dann, dass wir a so bestimmen können, dass:

$$\iiint \frac{e^{-\gamma\cdot(r-x+x_0)}}{r^2} \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{(1+R)^{2-\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leqslant \frac{a \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}}{R_0^{1+\beta}} \,.$$

Aus den jetzt erhaltenen Ungleichungen folgt, dass wir ein a so wählen können,

dass für genügend große R_0:

$$\left|\iiint \overline{u}_{ik}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{ak'}{R_0^{1-\alpha}} \cdot \left\{\sqrt{1+\frac{x_0}{R_0}} + \frac{1}{R_0^{\alpha+\beta}}\right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,.$$

Da das Integral links für alle Werte von x_0, y_0, z_0 stetig ist, folgt schließlich, dass wir eine solche positive Größe A_4 finden können, dass:

$$\left|\iiint \overline{u}_{ik}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right| \leqslant A_4 k' \cdot \left\{\frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_0)}}{(1+R_0)^{1-\alpha}} + \frac{1}{(1+R_0)^{1+\beta}}\right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R_0+x_0)}\,,$$

wenn:

$$\cos(\vartheta_0) = \frac{x_0}{R_0}\,, \quad (0 \leqslant \vartheta_0 \leqslant \pi)\,.$$

Ohne die Ableitungen:

$$\iiint \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_0}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
$$\iiint \frac{\partial u_{ik}}{\partial y_0}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
$$\iiint \frac{\partial u_{ik}}{\partial z_0}\psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

erschöpfend behandeln zu wollen, bemerken wir folgendes. Da:

$$\left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_0}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial y_0}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial z_0}\right| \leqslant \frac{A_1}{r\cdot[1+r\cdot(1-\cos(\vartheta))]} + \frac{A_1}{r^2}\,,$$

so haben wir, um eine obere Grenze für die absoluten Beträge jener Ableitungen festzustellen, nur das Integral:

$$\iiint \left[\frac{1}{r\cdot(1+r-x+x_0)} + \frac{1}{r^2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_1)}}{(1+R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}}\right] \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

zu untersuchen. Nun haben wir oben gesehen, dass:

$$\iiint \left[\frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_1)}}{(1+R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1+R)^{2-\beta}}\right] \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{r\cdot(1+r-x+x_0)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < \frac{a}{1+R_0}\,.$$

Nach unserem vierten Hilfssatz ist überdies:

$$\iiint \left[\frac{\sqrt{1+\cos(\vartheta_1)}}{(1+R)^{2-\alpha}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \right] \cdot \frac{e^{-\gamma\cdot(R+x)}}{r^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$< 3 \cdot \iiint \frac{1}{(1+R)^{2-\alpha}\cdot r^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < \frac{a}{(1+R_0)^{1-\alpha}} \,.$$

Wir schließen hieraus, dass man die positive Größe A_5 so wählen kann, dass:

$$\left| \iiint \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_0} \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right| , \cdots < \frac{A_5}{(1+R_0)^{1-\alpha}} \,.$$

Diese rohe Ungleichung genügt für unseren Zweck.

9. Durchführung des Existenzbeweises

Wir kehren zu den Integralgleichungen Gleichung 9, Gleichung 10, und Gleichung 11 zurück. Wir nehmen an, dass X, Y, Z abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z sind und dass man die positive Größe k' so wählen kann, dass:

$$|X|\,,|Y|\,,|Z| < \left\{ \frac{k'}{(1+R)^{2-\alpha}} \cdot \sqrt{1+\frac{x}{R}} + \frac{k'}{(1+R)^{2+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)} \,,$$

wobei

$$0 < \alpha < \frac{1}{8} \,,$$
$$0 < \beta < \frac{1}{8} \,.$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn X, Y, Z nur in einem endlichen Bereiche von Null verschiedene Werte besitzen.
Wir führen in unsere Integralgleichungen einen Parameter λ ein und schreiben sie folgendermaßen:

$$u'(x,y,z) = \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty (u_{11}X + u_{12}Y + u_{13}Z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$
$$+ \frac{\varrho\lambda}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty \left[\left(v'\overline{w'} - w'\overline{v'}\right) u_{11} + \left(w'\overline{u'} - u'\overline{w'}\right) u_{12} \right.$$
$$\left. + \left(u'\overline{v'} - v'\overline{u'}\right) u_{13} \right] \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

u.s.w. Hier stehen X, Y, Z; u', v', w'; $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$; u_{ik} für $X(\xi,\eta,\zeta)$, ...; $u'(\xi,\eta,\zeta)$; $\overline{u'}(\xi,\eta,\zeta)$, ...; $u_{ik}(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$. Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^n u'_n + \cdots\,, \\ v' &= v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^n v'_n + \cdots\,, \\ w' &= w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^n w'_n + \cdots\,, \end{aligned}$$

und bekommen zur Bestimmung der Funktionen u'_n, v'_n, w'_n:

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty (u_{11}X + u_{12}Y + u_{13}Z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,, \\ v'_0 &= \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty (u_{21}X + u_{22}Y + u_{23}Z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,, \\ w'_0 &= \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty (u_{31}X + u_{32}Y + u_{33}Z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_n = \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty \Bigg[& \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(v'_i \overline{w'}_{n-i-1} - w'_i \overline{v'}_{n-i-1}\right) u_{11} \\ & + \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(w'_i \overline{u'}_{n-i-1} - u'_i \overline{w'}_{n-i-1}\right) u_{12} \\ & + \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(u'_i \overline{v'}_{n-i-1} - v'_i \overline{u'}_{n-i-1}\right) u_{13} \Bigg]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_n = \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty \Bigg[& \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(v'_i \overline{w'}_{n-i-1} - w'_i \overline{v'}_{n-i-1}\right) u_{21} \\ & + \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(w'_i \overline{u'}_{n-i-1} - u'_i \overline{w'}_{n-i-1}\right) u_{22} \\ & + \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(u'_i \overline{v'}_{n-i-1} - v'_i \overline{u'}_{n-i-1}\right) u_{23} \Bigg]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,, \end{aligned}$$

$$w'_n = \frac{\varrho}{8\pi\mu} \cdot \iiint_\infty \Bigg[\sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(v'_i \overline{w'}_{n-i-1} - w'_i \overline{v'}_{n-i-1} \right) u_{31}$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(w'_i \overline{u'}_{n-i-1} - u'_i \overline{w'}_{n-i-1} \right) u_{32}$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=(n-1)} \left(u'_i \overline{v'}_{n-i-1} - v'_i \overline{u'}_{n-i-1} \right) u_{33} \Bigg] \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta \, ,$$

vorausgesetzt, dass diese Integrale einen bestimmten Sinn haben. Man sieht unmittelbar, dass unsre Formeln für u'_0, v'_0, w'_0 bestimmte, stetige und stetig differenzierbare Werte ergeben. Aus unseren grundlegenden Ungleichungen folgt ferner:

$$|u'_0| \, , |v'_0| \, , |w'_0| < \frac{3\varrho k' A_3}{8\pi\mu \cdot (1+R)} \, ,$$

$$\left|\overline{u'}_0\right| , \left|\overline{v'}_0\right| , \left|\overline{w'}_0\right| < \frac{3\varrho k' A_4}{8\pi\mu} \cdot \left\{ \frac{1}{(1+R)^{1-\alpha}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{R}} + \frac{1}{(1+R)^{1+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma \cdot (R+x)} \, ,$$

$$\left| \frac{\partial u'_0}{\partial x} \right| , \left| \frac{\partial v'_0}{\partial y} \right| , \left| \frac{\partial w'_0}{\partial z} \right| < \frac{3\varrho k' A_5}{8\pi\mu \cdot (1+R)^{1-\alpha}} \, .$$

Aus diesen Ungleichungen folgt wiederum, dass unsere Gleichungen für u'_1 v'_1 w'_1, bestimmte, stetige und stetig differenzierbare Werte geben und dass:

$$|u'_1| \, , |v'_1| \, , |w'_1| < \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu} \right)^3 \cdot \frac{k'^2 A_3^2 A_4}{(1+R)} \, ,$$

$$\left|\overline{u'}_1\right| , \left|\overline{v'}_1\right| , \left|\overline{w'}_1\right| < \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu} \right)^3 \cdot k'^2 A_3 A_4^2 \cdot \left\{ \frac{1}{(1+R)^{1-\alpha}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{R}} + \frac{1}{(1+R)^{1+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma \cdot (R+x)} \, ,$$

$$\left| \frac{\partial u'_1}{\partial x} \right| , \left| \frac{\partial v'_1}{\partial y} \right| , \left| \frac{\partial w'_1}{\partial z} \right| < \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu} \right)^3 \cdot \frac{k'^2 A_3 A_4 A_5}{(1+R)^{1-\alpha}} \, .$$

Indem man so fortfährt, sieht man, dass in der Tat unsere Gleichungen für jedes n bestimmte, stetige und stetig differenzierbare Werte von u'_n, v'_n, w'_n geben und dass, wenn man mit a_n die durch die Gleichungen:

$$a_0 = 1 \, ,$$

$$a_n = \sum_{i=6}^{i=(n-1)} a_i \cdot a_{n-i-1}$$

definierte Zahlenreihe bezeichnet, folgende Ungleichungen bestehen:

$$|u'_n|\,,|v'_n|\,,|w'_n| < a_n \cdot \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu}\right)^{2n+1} \cdot \frac{k'^{n+1}(A_3A_4)^n A_3}{(1+R)}\,,$$

$$\begin{aligned}\left|\overline{u'}_n\right|,\left|\overline{v'}_n\right|,\left|\overline{w'}_n\right| < a_n \cdot \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu}\right)^{2n+1} \cdot \frac{k'^{n+1}(A_3A_4)^n A_4}{(1+R)^{1-\alpha}} \\ \cdot \left\{\frac{1}{(1+R)^{1-\alpha}} \cdot \sqrt{1+\frac{x}{R}} + \frac{1}{(1+R)^{\alpha+\beta}}\right\} \cdot e^{-\gamma\cdot(R+x)}\,,\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial u'_n}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial v'_n}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial w'_n}{\partial z}\right| < a_n \cdot \left(\frac{3\varrho}{8\pi\mu}\right)^{2n+1} \cdot \frac{k'^{n+1}(A_3A_4)^n A_5}{(1+R)^{1-\alpha}}\,.$$

Nun besteht, wie man leicht zeigt,[10] die Gleichung:

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{x} = 1 + x + \cdots = \sum_0^\infty a_n x^n\,.$$

Die Reihe rechts konvergiert folglich unbedingt und gleichmässig, wenn:

$$|x| < \frac{1}{4}\,.$$

Folglich konvergieren die Reihen:

$$\begin{aligned}&\sum_0^\infty u'_n\lambda^n\,, \quad \sum_0^\infty v'_n\lambda^n\,, \quad \sum_0^\infty w'_n\lambda^n\,; \\ &\sum_0^\infty \frac{\partial u'_n}{\partial x}\lambda^n\,, \quad \sum_0^\infty \frac{\partial v'_n}{\partial y}\lambda^n\,, \quad \sum_0^\infty \frac{\partial w'_n}{\partial z}\lambda^n\end{aligned}$$

im ganzen Raume unbedingt und gleichmässig, wenn:

$$\frac{9\varrho^2}{(8\pi\mu)^2}|\lambda|k'A_3A_4 < \frac{1}{4}\,,$$

d. h. wenn:

$$|\lambda|k' < \frac{16\pi^2\mu^2}{9\varrho^2 A_3A_4}\,.$$

Die Reihen 6 definieren folglich für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|k'$ Funktionen von x, y, z, λ, welche in Bezug auf λ analytisch sind. Die Reihen sind in Bezug

[10] Vgl.: Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs application, Acta Math. T., 34, p. 256.

auf x, y, z gliedweise differenzierbar. Sie erfüllen die Integralgleichungen gemäß Gleichung 13. Wenn:

$$k' < \frac{16\pi^2\mu^2}{9\varrho^2 A_3 A_4}$$

können wir $\lambda = 1$ setzen. Wir schließen, dass unter dieser Voraussetzung:

$$u' = \sum_0^\infty u'_n \,,$$

$$v' = \sum_0^\infty v'_n \,,$$

$$w' = \sum_0^\infty w'_n$$

unsere Integralgleichungen Gleichung 9, Gleichung 10, und Gleichung 11 erfüllen. Gleichung 12 definiert eine zugehörige, eindeutige und stetige Funktion q.
Es bleibt uns nur noch übrig zu zeigen, dass die Lösung, deren Existenz wir nachgewiesen haben, sich für große Werte von R so verhält, dass die Integrale:

$$\int_S u' u_{i1} \cdot \cos(nx)\,\mathrm{d}s \,, \ldots, \int_S u'_n p_i \,\mathrm{d}s \,, \int_S u_{in} q \,\mathrm{d}s \,,$$

$$\int_S u' \frac{\mathrm{d}u_{i1}}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s \,, \ldots, \int_S u_{i1} \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}s \ldots, \quad (i = 1, 2, 3)$$

wenn die Fläche S ins Unendliche rückt, gegen Null konvergieren.
Aus dem Obigen folgt unmittelbar:

$$|u'|\,, |v'|\,, |w'| < \frac{a}{1+R}\,,$$

$$\left|\frac{\partial u'}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v'}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial w'}{\partial z}\right| < \frac{a}{(1+R)^{1-\alpha}}\,.$$

Aus Gleichung 12 folgt unter Benutzung unseres letzten Hilfssatzes:

$$|q| < \frac{a}{(1+R)^{1-\alpha}}\,.$$

Diese Ungleichungen, mit den Ungleichungen:

$$|u_{ik}| < \frac{A_3}{r \cdot (1 + r - x + x_0)}\,,$$

$$|p_i| < \frac{a}{r^2}$$

$$\left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial u_{ik}}{\partial z}\right| < \frac{A_3}{r \cdot (1 + r - x + x_0)} + \frac{A_3}{r^2}$$

verbunden, zeigen unmittelbar, dass die oben stehenden Integrale wirklich gegen Null konvergieren.

10. Zusammenfassung

In dieser Abhandlung wird gezeigt, dass wenn auf eine reibende und unzusammendrückbare Flüssigkeit ein System von Kräften wirkt, welche der Richtung und der Intensität nach von der Zeit unabhängig sind, während die Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel der x-Achse bewegen, ein stationärer und singularitätenfreier Bewegungszustand möglich ist, wenn erstens die Komponenten der Kraft X, Y, Z abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z sind, welche Ungleichungen von der Form:

$$|X|, |Y|, |Z| < k' \cdot \left\{ \frac{1}{(1+R)^{2-\alpha}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{R}} + \frac{1}{(1+R)^{2+\beta}} \right\} \cdot e^{-\gamma \cdot (R+x)}$$

mit

$$\alpha < \frac{1}{8},$$
$$\beta > 0,$$

genügen, und wenn zweitens die Konstante k' hinreichend klein ist.
Nachdem die Existenz dieses Bewegungszustandes festgestellt ist, treten die Fragen auf, ob er eindeutig bestimmt und ob er stabil ist. Diesen Fragen soll eine folgende Mitteilung gewidmet werden.

Tryckt den 4 maj 1911.

Uppsala 1911. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

Teil IV.
Carl Wilhelm Oseen. Nachruf

Carl Wilhelm Oseen (*1879 in Lund; †1944 in Uppsala) war ein schwedischer theoretischer Physiker in Uppsala und Direktor des Nobel-Instituts für Theoretische Physik in Stockholm.
Oseen studierte ab 1896 an der Universität Lund, wo er 1900 das Lizenziat ablegte. Er studierte außerdem in Göttingen. 1902 wurde er Dozent für Mathematik und schließlich zwischen 1904 und 1906, sowie 1907 und 1910 stellvertretender Professor für Mathematik. Von 1909 bis 1933 war Oseen Professor für Mechanik und Mathematische Physik an der Universität Uppsala. 1921 wurde er Mitglied der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften sowie 1933 Vorstand dessen Nobelinstitutes, das vorher unter Svante Arrhenius seinen Schwerpunkt in physikalischer Chemie hatte und sich mit Oseen auf theoretische Physik ausrichtete. 1924 wurde er korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.
Er formulierte die Grundzüge der Elastizitätstheorie flüssiger Kristalle (Oseensche Elastizitätstheorie). 1921 schlug er Albert Einstein für den Nobelpreis vor. Er war einer der ersten schwedischen Physiker, die die Atomtheorie von Niels Bohr akzeptierten und begleitete diesen wie Oskar Klein auf Bohrs Vorlesungsreise 1922 nach Göttingen.
Ein Resultat aus Oseens Werk sind die Oseen-Gleichungen aus der Strömungsmechanik. Diese sind eine linearisierte Version der stationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.
1936 hielt er einen Plenarvortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Oslo (Probleme der geometrischen Optik).

Abbildung 1: Carl Wilhelm Ossen, 1931 – 1933